# REFLEXIONES DE UN MATEMATICO
# SOBRE LA DIALECTICA

JOSE–LUIS MASSERA

**1.** *Movimiento y reposo, evolución, historia y cambios a lo largo del tiempo.* La actitud de rechazo, lamentablemente muy difundida, hacia el pensamiento dialéctico está muchas veces fundada en malentendidos. Para tratar de aclararlos, una cuestión esencial debe establecerse desde el principio: se trata de la relación entre cambio e invariancia, movimiento y reposo. La formulación de Heráclito, $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha\ \omega\rho\varepsilon\tilde{\iota}$ [1], sugiere a muchos que la dialéctica sería un pensamiento vago y flojo, mediante el cual se podría afirmar o negar lo que se quiera de cualquier cosa o concepto. No es así en absoluto. No es posible concebir el movimiento sin apoyarse en la noción de reposo; Engels decía que es precisamente en términos de " su contrario, en el reposo "[2], que se expresa el movimiento. Consideremos un simple ejemplo clásico, el de la célebre frase de Heráclito : "No te podrás sumergir *dos veces* en *el mismo* río."[3] Al decir "el mismo", está implícito que, desde algún punto de vista, el río no cambió : es posible reconocerlo. En la expresión "dos veces" hay implícito un cambio del río. Refiriéndonos a un objeto concreto, si se afirma que éste cambia, esto implica que le atribuimos verdaderamente una cierta fijación; de otro modo, la dialéctica sería efectivamente un juego de palabras vacío de sentido. Podemos además recordar el dicho profundo de Galileo: "L'onda cammina ma l'acqua non muta dal sito." [4]

Inversamente, al menos nosotros, los que pensamos la naturaleza dialécticamente, no podemos imaginar los objetos dotados de una fijeza absoluta: una montaña majestuosa es el resultado histórico de ciertos fenómenos geológicos pasados, no existe de toda la eternidad; podría ser modificada y hasta desaparecer como consecuencia de una catástrofe futura, o aún, a una escala menor, sufrir transformaciones debidas a los cambios de temperatura, a los fenómenos meteorológicos, o a la acción del hombre; éste último a su vez podría introducir cultivos, construir terrazas, perforar túneles, construir viaductos, explotar los minerales preciosos que guarda en su seno, etc.

**2.** *Dos análisis recientes.* En 1994 fueron publicados un libro de Gilles–Gaston Granger [5] y un ensayo de Juan Fló [6] que tratan sobre problemas importantes de la relación entre la dialéctica y las ciencias.

**2.1.** G.G.Granger, citando a Hegel, observa que "se ha creado una tradición según la cual la palabra 'dialéctica' designaría tanto el movimiento mismo de creación de los contenidos en virtud de una forma universal, asi como la ciencia de esta creación, capaz de elucidar lo real y su historia", y expresa su convicción de que "las tentativas para 'formalizar' un pensamiento dialéctico"[7] no pueden tener exito. Estoy completamente de acuerdo con estos juicios, y las pretensiones citadas me parecen residuos inaceptables del idealismo absoluto de Hegel. Puedo también estar de acuerdo (al menos a grandes rasgos) con la opinión de que "el proyecto de una dialéctica se mantiene posible, si se la considera como una estrategia del conocimiento objetivo." Pero "ella nunca es más que reguladora de una intención de conocimiento, de una práctica más que de una teoría. Es posible reinterpretar en este sentido tanto el movimiento dialéctico hegeliano como las 'leyes dialécticas' marxistas."[8] Podría hasta adelantar la idea de que una "formalización" de la dialéctica me parece un contrasentido: la transformaría en una doctrina rígida.

En el capítulo 6 de su libro, el autor discute la importante cuestión de la inferencia y afirma: "El movimiento dialéctico no provee inferencias propiamente dichas, es decir el pasaje necesario y unívoco de un enunciado a otro, o al menos a una alternativa definida de enunciados."[9] Si se trata efectivamente del sentido "propiamente dicho" del concepto de inferencia explicitado con precisión en la frase anterior, la aserción es incontestablemente verdadera, y esta verdad deriva de la aplicación rigurosa, a lo largo de la inferencia, de las reglas de la lógica formal clásica. Este es, en general, el caso de todas las ciencias formales en el sentido de Carnap, y en particular de la propia lógica y de las matemáticas, y es precisamente ahí en donde reside el valor de este tipo de ciencias (ver 4 más adelante). Sin embargo, al mismo tiempo, la "verdad" de estas inferencias no aporta *novedades*, es puramente tautológica, para retomar el término de Russell (ver 6.2). No hay duda que con frecuencia las raíces de los enunciados precedentes de estas inferencias "propiamente dichas" están a menudo profundamente ocultas, el acceso a ellas está bajo cerrojo; su puesta en evidencia no es trivial y exige a veces los esfuerzos considerables de un gran número de pensadores en el transcurso de siglos.

Pero, junto a estas inferencias puramente formales, hay otras (no veo porqué no podríamos llamarlas también inferencias; a menos que logremos ponernos de acuerdo en otro término apropiado) que aportan *novedades* sustanciales, y pienso que son precisamente las más importantes. Son ellas las que exigen una verdadera *creación* mental, un "salto" cualitativo del conocimiento. Estas iluminaciones reclaman en general una tensión extrema del pensamiento y la participación de otros procesos mentales (negaciones audaces — para dar un sólo ejemplo clásico, la que condujo, luego de siglos de esfuerzos infructuosos, al descubrimiento por Bolyai y Lobachevski de las geometrías no-euclidianas, negación que, dicho sea de paso, había sido concebida pero no abiertamente admitida por el gran Gauss — , o aún asociaciones de ideas imprevistas, intuiciones sorprendentes, etc.) que no pueden reducirse a reglas rígidas de aplicación casi mecánica. Pienso que sería apropiado llamarlas formas de pensamiento dialéctico, o aún de estar inspirados o dejarse guiar (aunque no soy entusiasta de estas fórmulas mecanicistas) por esquemas tales como las llamadas *tríadas* hegelianas (a menudo adoptadas, luego de Hegel, por pensadores marxistas), el desarrollo en espiral (o mejor: en hélice), etc.

Con mayor razón, no puedo estar de acuerdo con G.G.Granger cuando pasa de las ciencias formales a las naturales.[10] Escribe: "Sin duda siempre será posible, con cierto ingenio, reinterpretar *a posteriori* en términos de movimientos dialécticos el desarrollo de fenómenos que describen los modelos abstractos de la ciencia. Estos últimos son seguramente inventados y construidos conforme a una estrategia que no se reduce a la simple lógica, pero es la regulación lógica la que orienta el meta-discurso que los organiza. Por otra parte, ellos permiten prever, generalmente en forma satisfactoria y algunas veces con exacta precisión dicho desarrollo, mientras que la interpretación de una filosofía dialéctica de la naturaleza siempre llegó cuando ya todo estaba dicho...".[11] He tratado de mostrar en 1. que el movimiento-reposo y otras manifestaciones dialécticas en la naturaleza no solo no llegan tarde, sino que más bien existen antes de la formulación de las teorías.

Pero lo más sorprendente me parece ser lo siguiente: En la misma página en que figura la cita precedente, el autor habla de las fórmulas establecidas por los geómetras italianos del siglo XVI para resolver las ecuaciones de tercer grado, que resultan inaplicables en el caso llamado "irreducible", ya que exigirían la extracción de la raíz cuadrada de un número negativo (mi comentario: cosa curiosa, y que parece poner en evidencia una forma dialéctica. Estas raíces eran entonces llamadas imaginarias — nombre que perduró hasta nuestros días — y hasta imposibles). Peor aún, agrega, "las raíces [reales] de la ecuación existen en esos casos y pueden determinarse por tanteo, o por construcción gráfica." (Es decir: en el caso "irreducible" en donde aparecen en las fórmulas números imaginarios, aunque las raíces son reales, pueden hallarse por tanteo, método sin duda profundamente lógico...) Y en la página siguiente admite: "Pero la solución de la contradicción, mediante un movimiento que podríamos correctamente llamar dialéctico, consistirá en reformular el sistema de las reglas operatorias, de modo tal que resulte correlativo de un sistema ampliado de objetos (...): el formulario operatorio del álgebra autorizará entonces la extracción de raíces pares de números negativos, pero el campo de los números utilizados se ampliará al de los números 'complejos'(...)"[12] Estoy completamente de acuerdo con esta frase. Agrega además (y mi acuerdo se acentúa):"La historia de la matemática muestra en todo caso numerosos ejemplos de esa dialéctica, en la que se ve comprueba que no podría reducirse a la aplicación de principios y leyes generales, que exige siempre *invención* y *creación*, aunque su modo de avanzar nunca escapa de las ataduras propiamente lógicas."[13] No me canso de declarar que estoy totalmente de acuerdo con la frase entera.

En el capítulo 18, G.G.Granger expresa opiniones que me perecen igualmente positivas. "Por dialéctica, entenderemos solamente el movimiento de reestructuración de un sistema de conceptos que resuelve contradicciones y tensiones internas, cuando ese movimiento no es reducible a la deducción *regulada* de consecuencias a partir de proposiciones ya establecidas. La presencia de tales movimientos *creadores* en la historia de las ciencias es dificilmente rechazable (...)".[14] "En todo caso, cuando el libre juego de las manipulaciones se encuentra con obstáculos [que son equivalentes a una negación] aparece la *novación* conceptual".[15] "Que haya una dialéctica interna de la ciencia no significa entonces que la conciencia genere por sí misma [¿a la Hegel?] sus contenidos, sino que un sistema más o menos coherente de actos de pensamiento sea puesto en funcionamiento y que, al encontrar obstáculos, se transforme para sobrepasarlos. Uno de los proyectos de una filosofía de la ciencia debe ser sin duda el de exponer este trabajo."[16] Y finalmente: "Pero la historia nos muestra que el momento de la invención y del genio consiste justamente en la formulación efectiva de los problemas (...) [que] define positivamente la línea de su progreso."[17] (Cf. también 6.2) Estoy esencialmente de acuerdo con todas estas citas.

**2.2.** El ensayo de J.Fló analiza precisamente los conceptos de *novedad y creación*. El autor emplea en su texto, en forma sistemática y correcta, términos precisos del lenguaje sistémico moderno: *complejidad*, *entropía*, etc. Se plantea desde el principio la cuestión de adoptar "un sentido bastante preciso del concepto de novedad"; y propone "medir la novedad por la relación que existe entre una situación productora previa, por una parte, y lo que se deriva de ella, por otra".[18] Más concretamente, hay novedad "toda vez que aparece una estructura o un conjunto ordenado de alguna manera sin que la información necesaria para establecer ese conjunto de relaciones en las que consiste la estructura esté incluida en los antecedentes que la producen." Dicho de otro modo: "solamente hay novedad cuando la producción de una estructura no está controlada por agentes de igual estructura o de una estructura más compleja de la cual la primera es una parte o una consecuencia." La novedad es "una excedencia o una ganancia respecto a la situación antecedente."; o bien, todavía "hay novedad en un sentido fuerte toda vez que hay reducción de la entropía."[19]

Si por otra parte tenemos en cuenta que no es posible que el origen de la novedad resida en los antecedentes, necesariamente concluimos que ella resulta *"de una fuente aleatoria"*; debe por lo tanto ser encarada en el marco de "la teoría neodarwiniana de la evolución", que requiere siempre necesariamente "un dispositivo de selección [natural]".[20]

Debo decir que estoy esencialmente de acuerdo con estas tesis de Fló; hasta he dicho, sin emplear su lenguaje, refiriéndome a las "inferencias propiamente dichas" de Granger, que no podían aportar ninguna *novedad*. No obstante, considero necesario hacer en este punto algunos comentarios.

(i) La tendencia espontánea de los sucesos es el crecimiento de la entropía. Según la definición propuesta, la novedad aparece entonces a contra-corriente del curso de los sucesos, lo que puede sugerir que es más bien rara. En la pareja indisoluble evolución aleatoria – selección, y sin disminuir el papel del primer factor, pienso que hay que destacar el papel decisivo de la selección, en principio natural, pero atribuible sobre todo al factor humano, y particularmente al cerebro humano y a las sociedades humanas, tal como Fló lo señala más adelante.

(ii) Hay un ejemplo clásico (y al mismo tiempo imaginario...) del papel de la selección en la física: es el famoso *demonio de Maxwell*. Consideremos un gas, es decir un conjunto muy grande de moléculas que se desplazan a velocidades muy diferentes, y que chocan entre ellas así como con las paredes del recipiente en choques que se suponen elásticos. Supongamos además que el recipiente está dividido en dos partes A y B, separadas por un tabique con un pequeño orificio provisto de una válvula que puede abrirse o cerrarse a voluntad. A su lado, hay un pequeño demonio, muy ágil e inteligente, cuya función es la de abrir la válvula cuando llega una molécula rápida de la parte A hacia la B, para dejarla pasar, y de cerrarla en los demás casos. Al transcurrir el tiempo, las moléculas rápidas se encuentran en B, y las lentas en A: es un suceso *anti-entrópico*, una *novedad*. La selección operada por el demonio, aunque ninguna mente humana intervenga, es *inteligente*.

(iii) La selección es a menudo debida a la práctica humana, principalmente *social*. Sin duda las mentes intervienen aquí, pero el papel de la *acción* es predominante en el resultado. Podemos recordar al respecto la $11^{ava}$ *Tesis sobre Feuerbach* de Marx.

(iv) Podríamos comentar aquí experiencias de matemáticos, desde Arquímedes hasta Poincaré, que han escrito sobre el proceso de algunos de sus descubrimientos célebres, cosa que lamentablemente es poco frecuente... (ver 6.3). Solamente puedo decir que, en mi opinión, ellas confirman las tesis de Fló.

Para las cuestiones de que estamos hablando, el ensayo de Fló termina con reflexiones acerca de los aspectos *sociales*. "Estas dificultades deben corroer, creo, nuestra confianza en el modelo computacional, que es inevitable como modelo del cerebro individual sea un buen modelo para la producción intelectual de la sociedad humana en su historia. Por eso creo que es posible escapar a la condena que el modelo computacional parece decretar contra la creatividad — es decir, contra la producción de novedad intelectual por parte del hombre — mediante un modelo de creatividad extraindividual aplicable, en particular, al desarrollo de los instrumentos y los resultados cognitivos a lo largo de la historia.(...) Me refiero especialmente al desarrollo de la inteligencia (en tanto capacidad para la resolución de problemas y de representación interna) y la comunicación (en tanto sistema de señales intraespecíficas que permiten la coordinación grupal) las cuales tienen una larga historia filogenética independiente."[21] "(...) es la única manera de pasar de la lógica que opera en los circuitos (inaccesibles a la conciencia, la expresión verbal, el uso voluntario y toda forma de tematización, crítica y desarrollo) a la lógica fijada en lenguajes sociales (...). Ese salto de ciertas estructuras (...) a niveles muy superiores como son los del lenguaje y la representación interna, es bastante claro que la máquina individual no tiene medios de realizarlo. Solamente a través, del espacio externo de las construcciones sociales la máquina individual obtiene una vía indirecta de acceder a su lógica interna."[22] "(...) ese trabajo social aporta una novedad indudable. (...) un poder nuevo, más aún, da lugar a la aparición de un nuevo sistema. (...) se trata de un camino en el cual el azar y la selección cumplieron su papel."[23] Estoy completamente de acuerdo con estas reflexiones, y me parece que aportan puntos de vista verdaderamente nuevos para encarar estos problemas. Permítaseme anotar solamente que Fló no utiliza nunca la palabra "dialéctica" en su ensayo, aunque me parece un excelente ejemplo de empleo de dicha concepción...

**3.** *Sobre los orígenes de la matemática.* No hay duda de que el origen de las nociones matemáticas más rudimentarias debe situarse en la más lejana prehistoria, ligadas con las actividades prácticas y vitales de los primeros homínidos, su relación con la naturaleza, la formación del lenguaje, los intercambios en el seno de la tribu así como los intertribales. Una lenta acumulación de "saberes" — especialmente en Babilonia y Egipto — se dio en civilizaciones cuyos documentos escritos, relativamente abundantes, evidencian numerosos conocimientos matemáticos muy importantes. Sin embargo, hasta el día de hoy, no se ha encontrado ningún indicio que permita sospechar que al menos porciones mínimas de esos saberes hayan sido obtenidas por una vía que sobrepasara los métodos estrictamente empiristas, ni siquiera si estos pueblos supieron cómo formular resultados científicos de carácter general. En síntesis, sus conocimientos no constituian una ciencia, aunque fuese rudimentaria; eran reglas prácticas, con aplicaciones sin duda importantes, pero nada más.[24]

Algunos siglos antes de la era cristiana, un cambio radical se produjo en esta situación. En Grecia, la matemática se constituyó en verdadera ciencia, rica y articulada. Es el primer caso en la historia en que un conjunto considerable de conocimientos empíricos, de "saberes" prácticos, sufrieron un cambio cualitativo para transformarse en gran medida en un todo orgánico, que comenzaron a establecer sus propios métodos y a precisar los principios que les sirven de base. Todas las ciencias que hoy conocemos han seguido un camino análogo.

Hay que señalar además otra particularidad — muy rara en el conjunto de las ciencias — que caracteriza el nacimiento de la matemática: ni la investigación ni la exposición de los resultados obtenidos apelan, en principio, al empirismo. Esta afirmación es demasiado tajante, aunque esencialmente verdadera, y habrá que introducirle matices, cosa que haremos en lo que sigue.

Hay por otra parte una circunstancia extraña en este acontecimiento sorprendente: casi puede decirse que de ese "alumbramiento" nacieron gemelos. Otra rama del conocimiento apareció casi al mismo tiempo. El lector adivinará probablemente de qué se trata: también surge la *lógica*. Es cierto que durante milenios no se le ha reconocido la calidad de ciencia, de lo que nuestro siglo no duda. En la Antigüedad no alcanzó el grado sorprendente de organización formal al que llegó la matemática clásica, pero sí en nuestro siglo.

¿Estos eventos, tan excepcionales, cómo se produjeron? ¿Cómo podemos explicarlos?

**4.** *Ciencias fácticas y ciencias formales.* Para abordar estas cuestiones, conviene adoptar la terminología propuesta por R. Carnap.[25] Para Carnap, las ciencias formales son la lógica y la matemática, y las fácticas las demás, que tienen una base empírica: física, química, biología, sicología, sociología, historia, etc. Pero es necesario dar una definición de carácter general. Carnap propone tomar como base la distinción kantiana entre juicios *analíticos* y *sintéticos*. Los primeros son válidos incondicionalmente si están sintácticamente bien formados y se deducen por reglas lógicas a partir de otros juicios similares, *independientemente del valor de verdad de estos últimos*. Los juicios sintéticos son los que no son ni analíticos ni incompatibles (contradictorios en sí mismos, es decir incondicionalmente no válidos) y a ellos se puede, en general, aplicar uno u otro de los calificativos *verdadero* o *falso*. La distinción entre ciencia formal y fáctica "consiste entonces en que la primera no contiene más que enunciados analíticos, y la segunda únicamente enunciados sintéticos".

Las ciencias fácticas establecen juicios sintéticos sobre hechos naturales, observables o hipotéticos, de los cuales se desprenden, mediante reglas propias de las ciencias formales, otros juicios sintéticos. Las ciencias formales suministran entonces estos *instrumentos auxiliares* para establecer estas inferencias ("propiamente dichas" como diría G.G.Granger, cf. 2.1). Constituyen por lo tanto un *"cálculo auxiliar"* para facilitar el trabajo de las ciencias fácticas, introduciendo en el conjunto de las ciencias, formales y fácticas, una *economía global* importante. Más aún: las ciencias formales sugieren frecuentemente nuevos desarrollos en las ciencias fácticas.

El célebre aforismo de B.Russell, que parece una broma: "La matemática es la ciencia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad"[26], es entonces correcto no solamente para la matemática, sino para todas las ciencias formales. Es interesante recordar que Kant ya había comprendido la naturaleza formal de la matemática: "La *matemática* ha marchado por el camino seguro de una ciencia desde los tiempos más remotos que alcanza la historia de la razón humana, en el admirable pueblo griego. (...) ese cambio es de atribuir a una *revolución* que la feliz ocurrencia de un solo hombre llevó a cabo (...). (...) encontró que no tenía que inquirir lo que veía en la figura o aun en el mero concepto de ella y por decirlo así aprender de ella sus propiedades, sino que tenía que producirla, por medio de lo que, según conceptos, él mismo había pensado y expuesto en ella *a priori* (por construcción), y que (...) no debía atribuir nada a la cosa, a no ser lo que se sigue necesariamente de aquello que él mismo, (...) hubiese puesto en ella." [27]

Para cualquier juicio formal, lo que importa es la coherencia entre un enunciado cualquiera y los postulados, la corrección rigurosa de los pasos lógicos mediante los cuales se deduce aquél de éstos. La noción de "verdad" (en su sentido fundamental, real, fáctico), pierde todo significado en una ciencia formal. ¿Porqué la geometría euclidiana sería más verdadera que las geometrías no-euclidianas?; de hecho, los físicos de nuestro siglo prefieren las segundas. Hay un aspecto importante en el proceso de creación de la teoría de la Relatividad General que es interesante considerar. Einstein comprendía bien la naturaleza axiomática, formal, de la geometría, pero, como buen físico que era, sentía la necesidad de una geometría más estrechamente ligada a la realidad, de una geometría fáctica, si puede decirse. Inventó entonces la expresión 'geometría práctica' o 'física'[28], que ciertamente no es euclidiana, y en la que además los parámetros que definen la distancia y la curvatura del espacio en el entorno de un punto dependen de las masas materiales que en él se encuentran.

Creo que la razón fundamental por la cual los griegos crearon la matemática axiomática resulta ahora clara: comprendieron — sin decirlo explícitamente — cuán provechoso era para la economía global de la ciencia tener a disposición una ciencia formal que sirviera de "cálculo auxiliar" no solamente para la matemática, sino también para la lógica. Pienso que, si consideramos la célebre definición: *"La matemática, Reina y sirvienta de todas las ciencias"*[29], debemos agradecer por el honor del título acordado a ella, sin olvidar que su papel principal es el de "sirvienta".

Termino este parágrafo agregando una cosa que Carnap no podía prever. Me parece que ha llegado el momento de introducir una tercera ciencia formal, que no existía en 1934: *la informática.*

**5.** *El carácter formal de la matemática griega.* El sistema axiomático de Euclides, y el proceso de su establecimiento durante algunos siglos de historia es un tema de investigación extremadamente complejo y que ha sido abordado por varios pensadores, matemáticos, historiadores, filólogos, etc. Aunque conociese bastante el problema — lo que no es el caso —, las dificultades para exponerlo sucintamente serían insuperables. Es por esto que me decidí a hacer un breve resumen de las tesis de uno de estos grandes pensadores, el húngaro A.Szabó, quien ha publicado un voluminoso libro sobre estos temas[24], del cual ya tomé algunas ideas en el 3. El tema que la obra examina en su tercera parte es: *La construcción de la matemática en el marco de una deducción lógica.*

En primer lugar, Szabó discute largamente un problema de prioridad: ¿Fue la escuela filosófica eleática quien determinó las formas concretas tomadas en Grecia por la estructura *formal* hipotético-deductiva de la matemática antigua, o bien los acontecimientos sucedieron en el sentido inverso? Acepto las razones que él aporta a favor del primer punto de vista: una gran cantidad de argumentos de caracter filológico establecen un paralelismo asombroso entre el lenguaje de la *dialéctica* (que empleaban los círculos eleáticos, y que se extendió hasta los diálogos socráticos) y el que emplea Euclides en los *Elementos* del año 300 a.c., punto culminante de la *exposición* formal de la matemática griega. Reconozco que, aceptando esta argumentación, no me siento plenamente cómodo con la conclusión. No se conocen documentos de caracter *histórico* y *matemático* de una época más próxima a la de los Eleáticos (el pasaje del siglo VI al siglo V a.c.) que prueben el parentesco más o menos inmediato de la escuela filosófica eleática con *trabajos matemáticos* en los que se descubra claramente *la aplicación del método hipotético-deductivo.* Me temo que las pruebas que me gustaría tener sean imposibles de hallar, y, al decir esto, acepto la tesis de A.Szabó.[30] Agreguemos además, que el fin fundamental que perseguían los filósofos y los matemáticos con el pasaje de esta ciencia del estado *empírico* al estado de *ciencia formal, hipotético-deductiva*, respondía totalmente a la necesidad histórica, para el progreso de la ciencia, de un *giro radical hacia la racionalidad*, aún cuando éste exigiera el doloroso abandono de la *dialéctica* ingenua de la Antigüedad en provecho de una actitud *metafísica*.[31]

En segundo lugar, Szabó hace también comentarios de extrema importancia. Si es cierto que los Eleáticos influenciaron tanto la matemática griega, el resultado final podría haber sido un desastre completo desde el punto de vista científico: con "ángeles guardianes" tan radicales y severos como Parménides y Zenón, se puede suponer que todo hubiera terminado simplemente en un *τὸ όν έστι*.[32] Reteniendo del eleatismo el núcleo *racional-deductivo*, era absolutamente necesario aumentar la cantidad de *proposiciones inicialmente admitidas*. Es lo que los matemáticos griegos hicieron comenzando la exposición de su ciencia por un conjunto suficientemente rico de estas proposiciones, de las cuales pudiese deducirse, mediante la aplicación de las reglas lógicas, una gran cantidad de teoremas. Esto no era muy ortodoxo desde el punto de vista parmenidiano, era un verdadero atentado, pero había que llevarlo a cabo. Euclides distinguió tres tipos: *definiciones* ( όροι; no son nunca utilizadas efectivamente en los *Elementos*), *postulados* (αίτηματα) y *communes animi conceptiones* (κοιναὶ έννοιαι; también αξιωμάτα (axiomas), palabra que, según Szabó, equivale aproximadamente a *postulado*); aunque la función de todos ellos era esencialmente la misma: servir de punto de partida para el razonamiento. Resulta casi humorístico que los matemáticos griegos hayan sido forzados a utilizar estos artificios autoritarios y no muy honestos para reducir a la nada las άπορος (aporías) de Zenon, que era tan embarazoso eliminar con la única fuerza del razonamiento lógico...

**6.** *Matemática y dialéctica.* Hemos visto en 3, 4 y 5 varios casos en los que tras la aparente "rigidez metafísica" de la matemática se descubría una riqueza real en contradicciones y procesos dialécticos muy variados, que aparecieron a lo largo de la milenaria historia de la matemática, particularmente en los últimos siglos. ¿Alguien podría razonablemente apostar que ya hoy somos capaces de sobrepasar fácilmente estas dificultades? Evidentemente no. Al hacer la pregunta, no pienso solamente en las cuestiones más simples, a saber, las del nacimiento y desarrollo de nuevas ramas y estructuras matemáticas, ni en la resolución de viejos o nuevos problemas que aún no han sido aclarados y que son constantemente planteados por la ciencia, las técnicas y la práctica social. Pienso sobretodo en problemas particularmente difíciles, tales como los de los fundamentos y el de la naturaleza de nuestra ciencia, así como en los de la lógica y de las ciencias formales en toda su amplitud, que son realmente importantes para la ciencia y a la vez muy atractivos para la filosofía.

Esto es así hasta para los más estrictos y exigentes lógicos y formalistas. Yo diría — y no por una atracción malsana por las paradojas, pero sí por una sólida convicción dialéctica — que el formalismo es la fuente más rica de contradicciones dialécticas y paradojas (Zenón parece ingenuo frente a los aprendices de brujo modernos), el más poderoso motor dialéctico de la matemática del siglo XX. "La intención de conferirle a la matemática un estatuto de autonomía haciéndola *una ciencia puramente formal*, ha dicho con justeza F.Gonseth, *no estaba necesariamente ligada al proyecto de suministrar una demostración de la imposibilidad de una contradicción.*"[33] Tanto para los formalistas como para los intuicionistas, más aún en tanto se encuentran apasionadamente atados a sus respectivas tendencias, una comprensión dialéctica de sus problemas sería extremadamente fecunda; incluiría ciertamente conflictos, pero nunca "crisis" paralizantes: constantes "negaciones de negaciones" llenas de vida, alejando el escepticismo y el empobrecimiento de la ciencia.

Sin compartir plenamente el tono "personalista" de sus palabras, pero estando de acuerdo con ellas en general, en tanto reflejan, a mi entender, la riqueza de los factores dialécticos que actúan en los objetos matemáticos y en los temperamentos de los matemáticos, comparto la siguiente opinión de Poincaré: "Que la mente de un matemático se asemeja poco a la de un físico o a la de un naturalista, todo el mundo estará de acuerdo; pero los matemáticos mismos no se asemejan entre sí; unos no reconocen más que la lógica implacable, otros recurren a la intuición y ven en ella la única fuente del descubrimiento. Y sería una razón de desconfianza. ¿A estas mentalidades tan diferentes, los teoremas matemáticos mismos podrán aparecerles bajo la misma luz? ¿Una verdad que no es la misma para todos, es la verdad? Pero observando las cosas más de cerca, vemos cómo obreros tan diferentes colaboran en una obra común que no podría terminarse sin su participación. Y esto ya nos tranquiliza"[34]

**6.1.** *Dinámica externa y dinámica interna* Todos aceptarán — con acentos muy diferentes, por supuesto, según los temperamentos — que la investigación es motivada tanto por los hechos *materiales*, "externos", como por la dinámica *ideal*, "interna" a la matemática, o bien por las dos especies de hechos actuando en conjunto. Los primeros pueden presentarse en tanto que problemas y cuestiones provenientes de otras ciencias, de las técnicas, de la práctica social, y en particular de la vida económica. Para el matemático sensible a estas motivaciones, el pasaje del motivo a la investigación propiamente dicha puede ser completamente directo. Hasta es posible que sea el motor principal; en todo caso, es muy importante, y se debe sacar de ello las consecuencias apropiadas: el más estrecho acercamiento posible — en particular en el plano de la enseñanza y de la actividad académica — entre las personas y las instituciones que operan en esas esferas, por un lado, y los matemáticos, por el otro.

Pero del hecho que la matemática sea una ciencia *formal* resulta la enorme importancia que tiene para ella su propia *dinámica interna.* Es simplemente inconcebible escribir la historia de la matemática sin tenerla en cuenta. Un *racconto* histórico, muy sucinto, que mostraría claramente que no es posible comprender nada sobre la racionalidad del desarrollo de la matemática durante más de dos mil años si no se le da una gran atención al encadenamiento de los problemas, de los descubrimientos, de las influencias recíprocas, de las contradicciones, etc., que se han producido en ese desarrollo.

**6.2.** *El papel de las definiciones.* B. Russell, uno de los pioneros del logicismo matemático, escribe en una de sus obras, a mi modo de ver de modo demasiado tajante, pero en esencia justo: "La matemática y la lógica, hablando en términos históricos, han sido estudios enteramente diferentes. (...) Pero ambos se han desarrollado en los tiempos actuales: la lógica se hizo más matemática y la matemática más lógica. Por consiguiente, ahora es totalmente imposible trazar una linea divisoria entre las dos; de hecho, las dos son una sola. (...) En cuanto el trabajo matemático moderno está obviamente en la frontera de la lógica, otro tanto de la lógica moderna es simbólica y formal, de modo que la muy estrecha relación entre lógica y matemática se ha hecho obvia para todo estudioso instruido. (...) [y hay que admitir] la identidad de la lógica y la matemática". Más adelante agrega: "El principio de no contradicción es una entre varias proposiciones lógicas, no tiene especial preeminencia, y la prueba de que la negación de alguna proposición es en sí misma contradictoria probablemente debiera requerir otros principios de deducción aparte de aquél. Sin embargo, la característica de las proposiciones lógicas que estamos buscando, es aquélla que fue sentida e intentado ser definida, por aquellos que decían que consistía en la deducibilidad a partir del principio de no contradicción, Esta característica, es la que, podemos por el momento llamar *tautología*".[35]

Estas opiniones son también, casi con las mismas palabras, las de Wittgenstein, Carnap y otros lógicos y filósofos. Sin enfrentarlos directamente, no creo que muchos matemáticos se sientan felices con esta *identificación* entre lógica y matemática, ni con la reducción pura y simple de ésta a una *inmensa tautología.* ¿Hay alguna explicación razonable para la divergencia de estos puntos de vista? ¿Es posible reconciliarlos por poco que sea?

En primer lugar, la idea de tautología acarrea, me parece, una identidad tan mecánica que podría revelarse por medio de una máquina — ¿no es esto ya posible, o al menos en un futuro previsible? — Pero no puedo concebir que pueda hacerse matemática sin la intervención del cerebro de un matemático. Sobre este punto, estoy completamente de acuerdo con Poincaré: " Si Ud. asiste a una partida de ajedrez, no le alcanzará, para comprender la partida, con saber las reglas para el movimiento de las piezas. Eso le permitirá solamente reconocer que cada jugada fue hecha *conforme a esas reglas* y esta ventaja tendrá verdaderamente poco valor. Es sin embargo esto lo que haría el lector de un libro de matemática, si no fuera más que un lógico. Comprender la partida, es algo completamente diferente; es saber por que el jugador mueve tal pieza en lugar de tal otra que hubiera podido mover sin violar las reglas del juego. Es percibir *la razón íntima* que hace de esa serie de movidas una suerte de todo organizado. Con mayor razón, esta facultad es necesaria al jugador mismo, es decir al inventor."[36]

Es lo que dice también Dieudonné, matemático de raza a quien nadie puede acusar de creer que la matemática no es una ciencia formal. Agregaré que algunas dificultades que encontramos en la enseñanza de la matemática residen precisamente en ese punto: lograr que el alumno sea capaz de sentir "el alma" de una demostración, su idea conductora, su esencia. Es deseable no solamente que sea capaz de seguir *paso a paso* una demostración, sino que pueda *aprender a demostrar* el teorema en cuestión... Es el paso previo para que pueda ulteriormente adquirir la capacidad de demostrar *por sí mismo* un nuevo teorema.

En segundo lugar, pienso que hay que destacar el papel que juegan las definiciones introducidas por el matemático. Ellas determinan una *ruptura cualitativa* en la cadena más o menos monótona de deducciones lógicas de teoremas sucesivos. Son *actos de creación ideal* de *nuevos objetos mentales*; y este caso de creación de novedades no escapa a las ideas de J.Fló. Tampoco dudo en emplear la palabra "objeto": la experiencia individual, colectiva e histórica de matemáticos prueba que el conocimiento de esos nuevos objetos es a veces tan difícil como el de objetos materiales, y en ocasiones más aún. Se comportan frente a la conciencia que intenta abordarlos como verdaderas fortalezas muy sólidas, inexpugnables; son a veces necesarios los esfuerzos perseverantes, durante siglos, de numerosos matemáticos llenos de talento, para conquistarlos, y a menudo no somos capaces de hacerlo. ¿En estas condiciones, es legítimo hablar de *tautología*? Es por esto que asigno a las definiciones un papel de primerísima importancia en la matemática. Entre otros signos por los cuales puede medirse la fecundidad de un matemático, se encuentran la cantidad y el alcance de las nuevas definiciones que ha propuesto a lo largo de su carrera.

Podrían mencionarse una gran cantidad de ejemplos concretos de definiciones del tipo considerado. Lamentablemente, los que resultan más interesantes para la historia y la filosofía de la matemática exigen conocimientos y una técnica poco accesibles al lector no matemático. Me limitaré entonces a un caso simple, importante y clásico, de la extensión de la noción de número más allá de los números *naturales*: 1, 2, 3,... (es decir, si nos acordamos del dicho de Kronecker, los que fueron "creados por el buen Dios", siendo el resto "obra del hombre"). Se trata de los *números racionales* — y, aún en este ejemplo, me he visto obligado a renunciar a una exposición rigurosa de su teoría —.

En el marco de los números naturales, puede realizarse la suma y la multiplicación de dos números, y el resultado es nuevamente un número natural. Por el contrario, *no es siempre posible* sustraer o dividir un natural por otro. Tomemos el caso de la división: históricamente, fue el primero considerado por la humanidad (existen documentos egipcios y babilónicos, que lo atestiguan y datan de varios miles de años antes de la era cristiana). Los griegos esquivaron el problema mediante un desvío (que hablando propiamente no es sin embargo una *extensión* de los números naturales y no incorpora nuevas especies de *números*): si $m$ y $n$ son dos números naturales y si $m$ *no es divisible* por $n$ (es decir, si *no existe* un número *natural* $x$ tal que el resultado de la multiplicación de $n$ por $x$ sea igual a $m$), ellos consideraron la *razón* ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, *ratio*, de donde luego vendrá la palabra *racional*) $m : n$, que expresaba la *relación* entre los números $m$ y $n$.

Actualmente, se consideran las "fracciones" $m/n$, en donde $m$ y $n$ son números naturales cualesquiera. Hay que poner atención en el hecho de que $m/n$ es *meramente un símbolo*, desprovisto por el momento de significado, aún cuando el signo / recuerde la operación de división. Dos fracciones $m/n$ y $p/q$ serán consideradas *equivalentes* cuando $m.q = n.p$ (por ejemplo $p = 3m$ y $q = 3n$). Diremos entonces que definen *un mismo número racional*, que es *representado* por cualquiera de las fracciones de la clase de equivalencia. Podemos definir la adición, la multiplicación y la división de dos números racionales por las operaciones análogas hechas sobre representantes de cada uno de ellos de acuerdo a las reglas que se enseñan en la escuela elemental; y se demuestra fácilmente que el resultado *es el mismo número racional (perteneciente a la misma clase) independientemente de la elección que se haga de los representantes.* Resulta entonces razonable considerar los racionales como *números.* Si finalmente acordamos que el número racional definido por la fracción $m/1$ (y equivalentes) puede *identificarse* al número *natural* $m$, entonces el conjunto de los números racionales es verdaderamente una *extensión* de los números naturales, en la cual la imposibilidad en ciertos casos de la división ha desaparecido.

**6.3.** *Modo de exposición y modo de investigación.* Utilizo las mismas palabras que emplea Marx en su obra científica fundamental: "El *modo de exponer* tiene que distinguirse formalmente del *modo de investigar.*"[37] Al mismo tiempo, los dos modos están estrechamente ligados entre sí. Estamos aquí en pleno dominio de la dialéctica.

Comencemos por el modo de investigación, es decir la matemática *in the making.* Ya hablamos algo en relación a las definiciones. La investigación de un nuevo *objeto matemático ideal* — ya sea el resultado de una definición del propio matemático, o de otro tipo de origen, inclusive fáctico — exige un plan — que casi nunca es formulado en forma explícita y formal — en el que se combinan múltiples análisis deductivos, lógicos, formales, el examen de ejemplos concretos, tal vez más simples y transparentes, que puedan ayudar a imaginarse de qué se trata, el estudio de "contra-ejemplos" capaces de demostrar la falsedad de ciertas ideas preconcebidas sobre el objeto en cuestión, las modificaciones que puedan pensarse hacer a esas exploraciones previas para adaptarlas mejor a las propiedades todavía desconocidas del objeto, las mil variantes de vueltas y revueltas del objeto, etc. En síntesis, se trata de *tanteos* dificilmente asimilables a inferencias puramente lógicas. Pero constituyen el terreno fértil — tal vez semejante a la *etapa aleatoria* de la cual habla Fló — donde pueden nacer las *novedades*.

A mi juicio, es una pena que los matemáticos rara vez describan esos *trials and errors* (ensayos y errores) que implica siempre el trabajo creador. Es posible que esta timidez esté provocada por un falso orgullo, que trate de evitar mostrar debilidades que se consideradan vergonzosas; se prefiere exhibir, por un *modo de exposición* irreprochable, un resultado perfectamente prolijo. Esto priva a los matemáticos — particularmente a los jóvenes — del conocimiento, sin duda muy instructivo, del modo de creación de los grandes sabios, lo cual me parece lamentable. Ciertamente, hay excepciones: el texto sobre *El método* de Arquímedes[38], en la que el sabio griego relata (en una carta a Eratóstenes) cómo, utilizando ideas mecánicas fundadas en las leyes de la palanca que acababa de descubrir, pudo calcular áreas, volúmenes y centros de gravedad — una proeza que hubiera requerido los métodos del cálculo infinitesimal del siglo XVII —; la narración de Poincaré sobre su descubrimiento de las funciones theta-fuchsianas[39]; y algunos otros. B.L.van der Waerden escribió artículos interesantes sobre los procesos de la creación matemática.[40]

El relato de Poincaré que recién mencioné es particularmente instructivo en relación con las ideas de Fló. El cuadro que describe, el de un período previo de reflexión intensa en el cual manipuló un número considerable de ideas emparentadas con el problema que le preocupaba, *sin inferencia lógica "causal"*, me parece adecuado, por decirlo así, al *surgimiento aparentemente aleatorio* de la solución; me disculpo, no siendo yo sicólogo, por osar esta interpretación, y desearía que sicólogos profesionales consideraran este tipo de cuestiones.

Una vez hecho el descubrimiento, es *obligatorio* presentar los resultados de forma absolutamente explícita y rigurosa. En esta etapa, ninguna transgresión a las reglas de la lógica formal está permitida, ningún llamado a la intuición es aceptado, ninguna imprecisión es admitida. Es aquí en donde el *modo de exposición* interviene, y que el carácter de *ciencia formal* de la matemática aparece plenamente. No es en absoluto una etapa secundaria: muchas veces el rigor obligado de la presentación pone en evidencia fallas y errores que de otro modo pasarían inadvertidos. Entonces se abre una nueva etapa, en donde el modo de exposición y el modo de investigación actúan y reaccionan el uno sobre el otro dialécticamente, de manera que, desde cierto punto de vista, intercambian sus papeles respectivos.

**6.4.** *La dialéctica en la historia de la matemática.* Aquí estamos estrictamente en el dominio de la historia, aunque restringida a un aspecto muy particular de las actividades de la sociedad humana. Es entonces normal, que reine en él la dialéctica.

Hay que destacar, sin embargo, que la historia de la matemática, en tanto que "historia" de acontecimientos que se desarrollan siguiendo la "flecha del tiempo", está en general estrechamente ligada a la dialéctica "interna" del desarrollo de la matemática *en tanto ciencia*, a la *lógica* del avance de la ciencia matemática. Hemos visto muchas situaciones de este tipo en 6.3. El estudio de la acción recíproca entre los aspectos propiamente *históricos* y los aspectos *lógicos* del desarrollo de la ciencia, el examen cuidadoso de la *dialéctica* que vincula aquéllos con éstos ilumina a unos y otros y nos ayuda a comprenderlos mejor.

Un ejemplo muy interesante e importante de estas situaciones me fue sugerido en 1985 por Jean-Pierre Kahane, que se ocupa de él en su artículo *Mathematik* de una enciclopedia[41]. Trataré de describirlo en términos comprensibles para un no matemático, salvo los *nombres* de entidades matemáticas, designadas por el símbolo $L^p$ y las palabras *series trigonométricas*, de los cuales no me es posible aquí dar una definición técnicamente precisa. $L^p$ designa ciertos espacios de "dimensión infinita" cuyos "puntos" son *funciones integrables* en el sentido de Lebesgue (la *integral de una función* fue introducida por Leibniz en 1686, en la época del descubrimiento del *cálculo infinitesimal*, realizado simultánea e independientemente por él y por Newton; Bernard Riemann (1826 - 1866) hizo una primera generalización en una memoria fundamental de 1850 — cuyo tema principal es, precisamente, las *series trigonométricas* —; por último, Henri Lebesgue, en su libro *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904), extendió la definición a una nueva clase de funciones — llamadas *medibles* — aún más extensa, y universalmente utilizada en el análisis matemático de nuestro siglo). Las *series trigonométricas* — llamadas también *series de Fourier* — fueron introducidas por Joseph Fourier (1768 - 1830) en su célebre memoria *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Los términos de estas series son funciones trigonométricas, *seno* y *coseno*.

Ahora bien, en los alrededores de 1910, Franz Riesz, en una memoria sobre estas series, necesitó un lema — actualmente llamado "teorema de Riesz" — que dice: "$L^p$ es *completo*" (en donde la *completitud* es una propiedad *topológica*), que desempeña un papel central para demostrar que las series trigonométricas, que satisfacen una condición simple, *convergen* hacia su "suma". La *topología* es una rama importante del concepto general de *geometría* definido por Felix Klein (1849 - 1925), basado en la noción *algebraica* de *grupo*, desarrollada por Evariste Galois (1811 - 1832).

## Notas

1. "todas las cosas se mueven", G.S.Kirk y J.E.Raven, *Los filósofos presocráticos*, Gredos, Madrid, 1969, pág. 278, Nota 218. Cf. Platon, *Cratilo*, 402a.
2. F. Engels, *AntiDühring*, Ed. Pueblos Unidos, Montevideo, 1960, con pequeños ajustes en base al original alemán.
3. Obra citada en Nota 1, pág.167.
4. "La ola avanza pero el agua no cambia de lugar."
5. G.G.Granger, *Formes, operations, objets*, Vrin, Paris 1994.
6. J. Fló *Novedad y creación*, en *Interpretar, Conocer, Crear* (R.Bernardi, B.de Leon, M.I.Siquier ed.), Trilce, Montevideo, 1994, pág. 96-116.
7. Obra citada en Nota 5, pág.48-49
8. Ibid., pág. 52
9. Ibid., pág. 106
10. Ibid., pág. 107-109.
11. Ibid., pág. 107
12. Ibid. pág. 108
13. Ibid. pág. 108; el resaltado es mío.
14. Ibid. pág. 343-344; el resaltado es mío.
15. Ibid. pág. 345; el resaltado es mío.
16. Ibid. pág. 346
17. Ibid. pág. 347
18. Obra citada en Nota 6, pág.96
19. Ibid. pág. 97.
20. Ibid. pág. 102.
21. Ibid. pág. 106.
22. Ibid. pág. 107.
23. Ibid. pág. 109.

24. A. Szabó, *The beginnings of Greek Mathematics*, Akad. Kiado, Budapest, 1978, pág. 186.

25. R. Carnap, *Formalwissenschaften und Realwissenschaften, Erkenntnis* V, 1934, pág. 29-37.

26. *"Mathematics is the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true."*

27. E.Kant, *Crítica de la razón pura*, versión española de M.García Morente y M.Fernandez Nuñez, Porrúa, México, 1987, pág. 12; el resaltado es de E.K.

28. A.Einstein, *Geometrie und Erfahrung*, Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1921. Ver también el capítulo VII de M.Paty, *Einstein philosophe*, PUF, Paris, 1993.

29. *"Mathematics, Queen and handmaiden of all sciences"*.

30. Ver también sobre este punto su interesante artículo: *"Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft gewerden?"*, in Acta Antiqua Acad. Sci. Hung. 4, 1956, pág. 109-152.

31. Aclaro que, en este contexto, la palabra equivale a *no dialéctica.*

32. *" El ser es "*.

33. Cf. les Actes du Colloque sur *"Les mathématiques et la réalité"*, Sem. Math. Luxembourg, 1974, pág. 12. Citado por F.Campan, *Le formalisme et la controverse Poincaré-Hilbert*, Sem. Phil. Math., École Norm. Sup., Paris, 1987, pág. 11.

34. H.Poincaré, *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1912, pág. 5-6.

35. B.Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, ($1^{era}$ ed. 1919), Neill, Edimburgh, 1948, pág. 194 y 203. (El resaltado es de B.R.)

36. Obra citada en Nota 34, pág. 27.

37. K.Marx, *El Capital*, Libro I, Prólogo de la $2^{da}$ ed. alemana de 1873, traducción de J.B.Justo, Buenos Aires, Bibl. Nueva, 1946, pág. 17; el resaltado es mío.

38. T.B.Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, New York, retomado de la edición original de 1897 y 1912.

39. H.Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1920, 1, cap.3.

40. B.L.van der Waerden, *Einfall und Ueberlegung – Drei kleine Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens*, Birkhäuser, Basel, 1954.

41. *Enzyklopädischen Wörterbuch zu Philosophie und Wissenschaften*, Pahl-Rugenstein Verlag, Köln, 1989.