Revêtements tangentiels et tours infinies d'Artin-Schreier

Armando Treibich - EA2462 LML, Université d'Artois, France
RN, Universidad de la República, Uruguay - treibich@cmat.edu.uy

Géométrie algébrique/Algebraic geometry
Mots clés : courbe, jacobienne généralisée, revêtement d'Artin-Schreier, point de Cartier.
Key words : curve, generalized Jacobian, Artin-Schreier cover, Cartier point.

Résumé - Soit (X, q) une courbe lisse marquée, de genre $g > 0$ et définie sur un corps algébriquement fermé de caractéristique $\boldsymbol{p} \geq 0$. On considère tous les revêtements $\pi : \Gamma \to X$, génériquement étales, marqués en un sous-ensemble $D \subset \pi^{-1}(q)$ de cardinal $d \geq 0$ et satisfaisant une condition de tangence dans $Jac\Gamma$. On charactérise ces revêtements, appélés d-tangentiels, comme diviseurs de zéros de certains polynômes. Nous montrons enfin quelques pathologies en caractéristique positive. Notamment, des tours infinies de revêtements 1-tangentiels, étales au dessus de $X \setminus \{q\}$ mais sauvagement ramifiées au dessus de q. Elles existent si et seulement si $q \in X$ est un point de Cartier.

Tangential covers and infinite Artin-Schreier towers

Abstract Let (X, q) be a smooth marked curve of genus $g > 0$, defined over an algebraic closed field of characteristic $\boldsymbol{p} \geq 0$. We consider all generically étale covers $\pi : \Gamma \to X$, marked at a subset $D \subset \pi^{-1}(q)$ of cardinality $d \geq 0$, satisfying a natural tangency condition inside $Jac\Gamma$. We characterize the latter, so-called d-tangential covers, as zero-divisors of certain polynomials. We focus at last on funny behaviour in positive characteristic. Namely, infinite towers of 1-tangential covers, étale over $X \setminus \{q\}$ but wildly ramified over q. The latter exist if and only if $q \in X$ is a Cartier point.

1 Revêtements tangentiels et tours infinies d'Artin-Schreier

On fixe dorénavant une courbe marquée, lisse et projective (X, q), de genre $g > 0$ et définie sur un corps algébriquement fermé $\mathbb{K}$ de caractéristique $\boldsymbol{p} \geq 0$. On note $K(X)$ son corps de fonctions. A tout revêtement génériquement étale $\pi : \Gamma \to X$, on associe son dual $\pi^* : JacX \to Jac\Gamma$ et le plongement d'Abel $Ab_\Gamma : \Gamma \to Jac\Gamma$ dans la jacobienne généralisée de Γ. On identifie alors, l'espace tangent à Γ en un point lisse r, notée $T_{\Gamma,r}$, avec son image dans $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$, l'espace tangent à l'origine de $Jac\Gamma$. On dira désormais que $q \in X$ est de Weierstrass si $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) > 1$.

Les revêtements d-tangentiels de (X, q), définis ci-dessous, répondent à un problème géométrique motivé par la formule de Its-Matveev dans le cadre de l'équation KP. Ils ont été étudiés pour toute courbe elliptique complexe X (i.e. : $g = 1$ et $\boldsymbol{p} = 0$) dans [?],[?] et [?], suivant les travaux de I.Krichever, reliant les solutions doublement périodiques de KP avec le système intégrable de Calogero-Moser. Nous montrons que la plupart des résultats se généralisent au cas $g \geq 1$ et $\boldsymbol{p} \geq 0$, au prix de quelques hypothèses, e.g., q n'est pas un point de Weierstrass de X. D'autre part, des nouvelles propriétés propres à la caractéristique positive voient le jour (cf., Corollaire 1.16).

Définition 1.1

Soit $\pi : \Gamma \to X$ un revêtement marqué en un sous-ensemble $D \subset \pi^{-1}(q)$. Admettons en plus que, soit $d(\pi^*)(T_{X,q}) = \{0\}$ et $D = \emptyset$, soit $d(\pi^*)(T_{X,q}) \neq \{0\}$ et D est minimal pour la propriété:

$$d(\pi^*)(T_{X,q}) \subset \sum_{r \in D} T_{\Gamma,r} \ .$$

Dans ce cas, si d est le cardinal de D, on dira que π est d-tangentiel. On l'appelera en plus décomposable s'il existe un revêtement $\underline{d}$-tangentiel $\underline{\pi} : (\underline{\Gamma}, \underline{D}) \to X$, avec $\underline{d} < d$, et $\varphi : \Gamma \to \underline{\Gamma}$, tels que $\pi = \underline{\pi} \circ \varphi$ et $D = \varphi^*(\underline{D})$. Dans le cas contraire on dira que π est d-tangentiel indécomposable.

Théorème 1.2 *Critère de d-tangence* ([**?**]-1.8)

Soient $\pi : (\Gamma, D) \to X$ comme ci-dessus et z une coordonnée locale en $q \in X$. Alors, π est d-tangentiel si et seulement si $\mathrm{h}^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\sum_D r)) = 1$ et il existe $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$, appelée fonction d-tangentielle associée à π, telle que:

1. *κ est holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(q)$;*
2. *dans un voisinage de $\pi^{-1}(q)$, le diviseur de pôles de $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ est égal à $\sum_D r$.*

Définition 1.3

Un polynôme unitaire $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j} \in K(X)[T]$ sera appelé d-tangentiel, si et seulement si, il satisfait les propriétés suivantes:

1. *pour tout $j = 1, \cdots, n$ le coefficient α_j appartient à $\mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$;*
2. *tous les coefficients de $z^d P(T\text{-}\frac{1}{z}) =: z^d T^n + \sum_{j=1}^n a_j T^{n-j}$ sont holomorphes en q;*
3. *d est le plus petit naturel satisfaisant la propriété ci-dessus, i.e.: $z^d P(T\text{-}\frac{1}{z})_{|z=0} \neq 0$.*

On notera $\theta_{d,n}(X,z)$ le sous-ensemble des polynômes d-tangentiels de degré n. Le sous-espace affine défini par les deux premières conditions est l'union $\Theta_{d,n}(X,z) := \cup_{i=0}^d \theta_{i,n}(X,z)$.

Proposition 1.4

Soit $\pi : (\Gamma, D) \to X$ un revètement d-tangentiel de degree n, muni d'une fonction d-tangentielle $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$, et notons $P_\kappa(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_{j,\kappa} T^{n-j}$ son polynôme caractéristique. Alors P_κ appartient à $\theta_{d,n}(X,z)$, et il est irréductible dans $K(X)[T]$ si et seulement si π est indécomposable.

Preuve : Au signe près $\alpha_{j,\kappa}$ est la j-ème fonction symmetrique de κ par rapport à π. Rappelons aussi que κ est holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(q)$ et a, en tout point $r \in \pi^{-1}(q)$, un pôle d'ordre majorée par $ind_\pi(r)$, l'indice de ramification de π en r. Il s'en suit que $\alpha_{j,\kappa} \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$. D'où P_κ satisfait la première propriété. Vérifions les deux restantes.

La j-ème fonction symmetrique de $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ par rapport à π est égale, au signe près, à $a_{j,\kappa} z^{-d}$. Celle-ci a un pôle simple en tout point $r \in D$ et est holomorphe en tout autre point de $\pi^{-1}(q)$. Donc, $a_{j,\kappa} z^{-d}$ doit avoir un pôle en q, d'ordre majoré par $min\{d, j\}$. De plus, on peut vérifier que $a_{j,\kappa} z^{-d}$ a un pôle d'ordre égal à d (au moins) pour $l = \sum_{r \in D} ind_\pi(r)$. D'où $P_\kappa \in \theta_{d,n}(X,z)$. Finalement, P_κ est irréductible si, et seulement si, le morphisme $(\kappa, \pi) : \Gamma \to \mathbb{P}^1 \times X$ a degré 1 sur son image $\{P_\kappa(T) = 0\}$. Dans le cas contraire il est une puissance d'un autre polynôme. Par exemple, si π est décomposable, il existe un revêtement $\underline{d}$-tangentiel $\underline{\pi} : (\underline{\Gamma}, \underline{D}) \to X$ et un morphisme $\varphi : \Gamma \to \underline{\Gamma}$, de degré $m > 1$, tels que $\pi := \underline{\pi} \circ \varphi$ et $D = \varphi^{-1}(\underline{D})$. Il s'en suit que $\kappa = \underline{\kappa} \circ \varphi$, où $\underline{\kappa}$ est une fonction tangentielle pour $\underline{\pi}$, et $P_\kappa(T) = P_{\underline{\kappa}}(T)^m$. ■

Lemme 1.5 - *Critère d'irréductibilité*

Le polynôme $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ n'est pas irréductible dans $K(X)[T]$ si, et seulement si, il existe $Q \in \theta_{d',n'}(X,z)$ et $R \in \theta_{d\text{-}d',n\text{-}n'}(X,z)$, où $0 \leq d' \leq d$ et $0 < n' < n$, tels que $P = QR$.

Preuve : Soit $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ tel que $P = QR$ avec $1 < n' := degQ < n$. Alors pour $t \in \mathbb{K}$ générique le produit $P(t) = Q(t)R(t)$ est holomorphe en dehors de q. Il s'en suit que les coefficients de $Q(T)$ et $R(T)$ le sont aussi. On montre alors par un calcul simple qu'ils doivent satisfaire la propriété 1.3.1 ci-dessus, de même que 1.3.2 pour $d', d'' \in \mathbb{N}$. En particulier, $z^{d'+d''}P(T\text{-}\frac{1}{z}) = z^{d'}Q(T\text{-}\frac{1}{z})z^{d''}R(T\text{-}\frac{1}{z})$ doit avoir tous ses coefficients holomorphes en q et sa restriction en $z = 0$ ne peut pas s'annuler. Donc $d' + d'' = d$. En d'autres termes $Q \in \theta_{d',n'}(X,z)$ et $R \in \theta_{d\text{-}d',n\text{-}n'}(X,z)$. ■

Lemme 1.6

Soit $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{n\text{-}j} \in K(X)[T]$ *et notons* $z^d P(T\text{-}\frac{1}{z}) =: z^d T^n + \sum_{j=1}^{n} a_j T^{n\text{-}j}$. *Alors, pour tout* $j = 1, \cdots, n$ *le coefficient* a_j *satisfait, au voisinage de* q, *l'égalité*:

$$a_j(z) = \frac{(\text{-}1)^j}{z^{j\text{-}d}}\Big(\tbinom{n}{j} + \sum_{i=1}^{j} \tbinom{n\text{-}i}{j\text{-}i}(\text{-}z)^i \alpha_i\Big).$$

Si en plus $q \in X$ *n'est pas de Weierstrass,* $g \le d \le n$ *et* $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$ *pour tout* $j = 1, \cdots, n$, *alors pour tout* $j \le d$ *le coefficient* $a_j(z)$ *est égal à* $a_j(z) = z^{d\text{-}j} b_j(z)$, *avec*:

$$b_j(z) \text{ holomorphe telle que } b_j(0) = \tbinom{n}{j}(\text{-}1)^j \quad \text{si } j \le g$$

et

$$b_j(0) = \tbinom{n}{j}(\text{-}1)^j + \sum_{g<i\le j} \tbinom{n\text{-}i}{j\text{-}i}(\text{-}1)^{j\text{-}i} z^i \alpha_i(z)_{|z=0} \quad \text{pour tout } g < j \le d.$$

Enfin, demander que les coefficients restants (éventuels) $\{a_j\,, d < j \le n\}$ *soient holomorphes en* q, *revient à résoudre un système triangulaire en les développements polaires des coefficients* $\{\alpha_j\,, d < j \le n\}$, *où à chaque pas la solution est unique modulo* $\mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(dq)\big)$.

Le lemme ci-dessus se demontre par calcul direct et implique que $\Theta_{d,n}(X,z)$ est vide dans tous les cas cités ci-après.

Proposition 1.7

1. $\Theta_{0,n}(X,z) = \emptyset$ *si* $\boldsymbol{p} = 0$, *ou si* $\boldsymbol{p} > 0$ *et* $n \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}^*$.
2. $\Theta_{1,2}(X,z) \neq \emptyset$ *si et seulement si* X *est hyperelliptique et* q *de Weierstrass.*
3. *Soit* $n > 2$ *et* $g > 1$, *alors* $\Theta_{1,n}(X,z) = \emptyset$ *chaque fois que, soit* $\boldsymbol{p} = 0$, *soit* $\boldsymbol{p} \ge 5$ *et* $n(n\text{-}1)(n\text{-}2) \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$, *soit* $\boldsymbol{p} = 3$ *et* $(n+1)(n+4) \in 9\mathbb{N}$, *ou finalement,* $\boldsymbol{p} = 2$ *et* $n\text{-}3 \in 4\mathbb{N}$.
4. *Supposons* $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) = 1$ *et* $d < min\{g, n\}$. *Alors* $\Theta_{d,n}(X,z) = \emptyset$ *si* $d < n \le g$ *ou si* $\boldsymbol{p} = 0$. *Si au contraire* $\boldsymbol{p} > 0$ *et* $d < g < n$, *soit* $\Theta_{d,n}(X,z) = \emptyset$, *soit* $dim\big(\Theta_{d,n}(X,z)\big) < n$.

Preuve :

1. Quand $d = 0$ on a $a_1 = \text{-}\frac{n}{z} + \alpha_1$, lequel devrait être holomorphe en $z = 0$, forçant α_1 à avoir un pôle simple. Contradiction !.
2. Quand $d = 1$ on a $a_2 = \frac{1}{z} \text{-} \alpha_1 + z\alpha_2$, lequel devrait être holomorphe en $z = 0$. Donc, α_2 doit avoir un pôle double en q, i.e. : X est hyperelliptique et q un point de Weierstrass.
3. Soit $n > 2$ et $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{n\text{-}j} \in \Theta_{1,n}(X,z)$. Alors les coefficients a_2 et a_3 sont égaux à $a_2 = \binom{n}{2}\frac{1}{z} + (1\text{-}n)\alpha_1 + z\alpha_2$ et $a_3 = \text{-}\binom{n}{3}\frac{1}{z^2} + \binom{n\text{-}1}{2}\frac{1}{z}\alpha_1 + (2\text{-}n)\alpha_2 + z\alpha_3$. Il s'en suit, sous les conditions annoncées, que α_2 et α_3 ont un pôle double et triple en q, respectivement. Donc, X est une courbe elliptique (i.e. : $g = 1$).

4. Supposons $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) = 1$ et soit $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n\text{-}j} \in K(X)[T]$, avec chaque $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$, et notons $z^d P(T\text{-}\,\frac{1}{z}) = z^d T^n + \sum_{j=1}^n a_j T^{n\text{-}j}$. Rappelons que

$$a_j = \frac{(\text{-}1)^j}{z^{j\text{-}d}}\Big(\tbinom{n}{j} + \sum_{i=1}^{j} \tbinom{n\text{-}i}{j\text{-}i}(\text{-}z)^i \alpha_i\Big) \quad \text{et} \quad a_n(z) = \frac{(\text{-}1)^n}{z^{n\text{-}d}}\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} (\text{-}z)^i \alpha_i\Big).$$

Si $d < n \leq g$, le coefficient $a_n(z) = \frac{(\text{-}1)^n}{z^{n\text{-}d}}\Big(1 + \sum_{i=1}^n (\text{-}z)^i \alpha_i\Big)$ a un pôle dordre $n\text{-}d$ en q. D'où $\Theta_{d,n}(X,z) = \emptyset$. Supposons dorénavant $d < g < n$. Si $j \leq d$ la fonction a_j est holomorphe en q, quelles que soient les constantes $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_j\}$. Pour tout autre $j > d$, une fois choisis $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j\text{-}1}\}$, il existe au plus un élément $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$ tel que le coefficient a_j correspondant soit holomorphe en q. Pour cela il faut que $\boldsymbol{p} > 0$ et $\binom{n}{j} \in \boldsymbol{p}\mathbb{N}$. Il s'en suit que $\Theta_{d,n}(X,z) = \emptyset$ si $\boldsymbol{p} = 0$ ou s'il existe $j > d$ tel que $\binom{n}{j} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$. Dans le cas contraire on en déduit tout d'abord que $dim\big(\Theta_{d,n}(X,z)\big) \leq n$. D'autre part, du fait que $(\text{-}1)^n z^{n\text{-}d} a_n(z) = 1 + \sum_{i=1}^n (\text{-}z)^i \alpha_i$ a un zéro d'ordre $\geq n\text{-}d \geq 2$, la constante α_1 satisfait l'équation $1\text{-}\alpha_1 z + \sum_{i=g+1}^n (\text{-}z)^i \alpha_i = 0 \,\mathrm{mod}(z^2)$. D'où $dim\big(\Theta_{d,n}(X,z)\big) < n$. ■

Théorème 1.8

Soient $g \leq d \leq n$, mais $g < n$ et supposons en plus que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Alors, $\theta_{d,n}(X,z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{d,n}(X,z)$, de dimension $n(d\text{-}g+1)\text{-}\frac{1}{2}(d\text{-}g)(d+g\text{-}1)$, et son élément générique est irreductible.

Preuve : D'après le Lemme ci-dessus, les d premiers coefficients (i.e. : $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_d\}$) peuvent être choisis arbitrairement. On vérifie également que les *n-d* restants s'obtiennent, modulo un élément arbitraire de $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(dq))$ chacun, en résolvant un système triangulaire en les coefficients précédents. Donc

$$dim\, \Theta_{d,n}(X,z) = \sum_{j=1}^{d} \mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) + (n\text{-}d)\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(dq)).$$

Or, le point $q \in X$ n'étant pas de Weierstrass, on a $\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) = 1$ pour tout $j \leq g$ et $\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) = d\text{-}g+1$ pour tout $j > g$. En remplaçant dans la formule ci-dessus on obtient la dimension annoncée.

Il en résulte aussi (avec 1.7.4), que $dim\big(\Theta_{d',n'}(X,z)\big) + dim\big(\Theta_{d\text{-}d',n\text{-}n'}(X,z)\big) < dim\big(\Theta_{d,n}(X,z)\big)$, por tous $d' \leq d$ et $n' < n$. Donc, d'après le Critère 1.5, les éléments irréductibles dans $\Theta_{d,n}(X,z)$ forment un ouvert dense.

Il reste à prouver que $\theta_{d,n}(X,z) = \Theta_{d,n}(X,z) \setminus \Theta_{d\text{-}1,n}(X,z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{d,n}(X,z)$. Si $d > g$ on a $dim\big(\Theta_{d,n}(X,z)\big)\text{-}dim\big(\Theta_{d\text{-}1,n}(X,z)\big) = n+1\text{-}d > 0$, d'où le résultat. Pour $d = g$ enfin, on a $dim\big(\Theta_{g,n}(X,z)\big)\text{-}dim\big(\Theta_{g\text{-}1,n}(X,z)\big) = n\text{-}dim\big(\Theta_{g\text{-}1,n}(X,z)\big) > 0$, d'après 1.7.4. Donc, $\theta_{g,n}(X,z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{g,n}(X,z)$. ■

Définition 1.9

1. *Fixons $z : X \to \mathbb{P}^1$, fonction méromorphe avec un zéro simple en q et l autres notés $\{\alpha_i\}$ $(l \geq 1)$. On considère les ouverts affines $U := X\setminus\{q\}$ et $\overline{U} := X\setminus\{\alpha_i\}$. On note $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to X$ la surface réglée obtenue par recollement des fibres au dessus de $q' \in U \cap \overline{U}$, entre $\mathbb{P}^1 \times U$ et $\mathbb{P}^1 \times \overline{U}$, au moyen de la translation ci-dessous:*

   quel que soit $q' \in U \cap \overline{U}$ on identifie $(T\,, q') \in \mathbb{P}^1 \times U$ avec $(\overline{T}\text{-}\,\frac{1}{z(q')}\,, q') \in \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$.

2. *Les sections à l'infini, $q' \in U \mapsto (\infty, q') \in \mathbb{P}^1 \times U$ et $q' \in \overline{U} \mapsto (\infty, q') \in \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$, coïncident et définissent une section particulière notée $C_o \subset \mathcal{S}$.*
3. *On note $\mathcal{S}_q$ la fibre $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(q)$, $p_{\mathcal{S}} := C_o \cap \mathcal{S}_q$ et $K_{\mathcal{S}}$ le diviseur canonique de $\mathcal{S}$. Ce dernier est numériquement équivalent à celui de la 2-forme $dT \wedge dz$ (donc à $-2C_o + (2g-2)\mathcal{S}_q$).*
4. *Etant donné $P(T) \in K(X)[T]$, vu comme morphisme rationnel $\mathbb{P}^1 \times U \subset \mathcal{S} \to \mathbb{P}^1$, les diviseurs de zéros $\{P(T) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times U$ et $\{P(\overline{T} - \frac{1}{z}) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$ se recollent au dessus de $U \cap \overline{U}$ et définissent un diviseur effectif de $\mathcal{S}$ noté Y_P.*

Proposition 1.10 *Soit $\pi : (\Gamma, D) \to X$ un revêtement d-tangentiel indécomposable de degré n. Alors son genre arithmétique est majoré par $n(d+g-1) + 1 - \frac{1}{2}d(d+1)$.*

Preuve : Soit $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$ une fonction d-tangentielle associée à π et $P(T)$ son polynôme caractéristique. Alors π se factorise via la projection naturelle $Y_P \subset S \to X$ du diviseur irréductible associé à P dans 1.9.4. D'autre part, du fait que $P \in \theta_{d,n}(X,z)$, on en déduit que Y_P est linéairement équivalent à $nC_o + \mathcal{S}_q$ et n'intersecte C_o qu'au point $p_{\mathcal{S}}$, où il a une singularité de multiplicité d. Donc, son genre arithmétique vaut $p_a(Y_P) = n(d+g-1) + 1 - d$ et celui de Γ est majoré par $p_a(\Gamma) \leq n(d+g-1) + 1 - d - \frac{1}{2}d(d-1) = n(d+g-1) + 1 - \frac{1}{2}d(d+1)$. ∎

Remarque 1.11 *Fixons $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ tel que $Y_P \subset S$ soit une courbe irréductible, ayant une singularité ordinaire de multiplicité d en $p_{\mathcal{S}}$. En éclatant $p_{\mathcal{S}} \in Y_P \subset S$, on lui associe naturellement un revêtement $\pi_P : (\Gamma_P, D) \to X$ de genre arithmétique $p_a(\Gamma_P) = n(d+g-1)+1-\frac{1}{2}d(d+1)$, marqué en d points de la fibre $\pi_P^{-1}(q)$. Si en plus celui-ci vérifie $\mathrm{h}^0\big(\Gamma_P, \mathcal{O}_{\Gamma_P}(D)\big) = 1$, on peut affirmer qu'il est d-tangentiel. Nous énnonçons ci-dessous, mais sans preuve car trop longue, des conditions assurant que cela est vrai pour $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ suffisement générique. Nous construisons enfin, des tours infinies de revêtements 1-tangentiels, qui n'existent qu'en caractéristique positive.*

Proposition 1.12

Soient $g \leq d \leq n$ et $g < n$, mais $(n-g)\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$ si $g = d$. Supposons en plus que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Pour tout $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ on note $e : \Gamma_P \subset \hat{\mathcal{S}} \to Y_P \subset \mathcal{S}$ le transformé strict de Y_P par l'éclatement de $p_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$. Alors, pour P suffisement générique:

1. *Y_P est irréductible et a une singularité ordinaire de multiplicité d en $p_{\mathcal{S}}$;*
2. *$\pi := \pi_{\mathcal{S}} \circ e : \Gamma_P \to X$ est étale aux d pré-images $e^{-1}(p_S) \subset \pi^{-1}(q)$;*
3. *Γ_P a un genre arithmétique égal à $n(d+g-1) - \frac{1}{2}d(d+1) + 1$, et est lisse si $\boldsymbol{p} = 0$.*

Corollaire 1.13

Soient $g \leq d \leq n$ et $g < n$, mais $(n-g)\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$ si $g = d$, et supposons que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Alors, il existe une famille de revêtements d-tangentiels de X, lisses si $\boldsymbol{p} = 0$, de degré-n, dimension $n(d-g+1) - \frac{1}{2}(d-g)(d+g-1)$ et genre arithmétique $n(d+g-1) - \frac{1}{2}d(d+1) + 1$.

Définition 1.14 ([?]-2.1)

Le point $q \in X$ est dit de Cartier si $\boldsymbol{p} > 0$ et il existe $f \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(\boldsymbol{p}q)\big)$ avec développement de Laurent $f = \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z)$, pour un certain $c \in \mathbb{K}$. Quel que soit $a \in \mathbb{K}^*$ on note alors $\Gamma_a \subset \mathcal{S}$ le diviseur associé à $P_a(T) := T^{\boldsymbol{p}} - aT + f$, muni de la projection $\pi_a := \pi_{\mathcal{S}|\Gamma_a}$, dite d'Artin-Schreier, et $\kappa_a : \Gamma_a \to \mathbb{P}^1$, la restriction du morphisme naturel $\mathbb{P}^1 \times X \subset \mathcal{S} \to \mathbb{P}^1$ défini par T (1.9.4.).

Théorème 1.15

Pour tout $a \in \mathbb{K}^*$ la courbe Γ_a ci-dessus est lisse et irréductible. De plus, π_a est cyclique et étale au dessus de $X \setminus \{q\}$. Au cas où $a = c \neq 0$, le genre de Γ_c vaut $\boldsymbol{p}(g-1) + 1$ et π_c est étale et 0-tangentiel. En particulier $P_c(T) \in \theta_{0,\boldsymbol{p}}(X,z)$. Si par contre $a \notin \{c, 0\}$, on a:

1. *le genre de Γ_a vaut $\boldsymbol{p}g$ et $p_{\mathcal{S}}$ est un point de Cartier de Γ_a;*
2. *le revêtement π_a est (uniquement et) sauvagement ramifié en $p_{\mathcal{S}}$;*
3. *$\pi_a : (\Gamma_a, p_{\mathcal{S}}) \to X$ est 1-tangentiel et κ_a une fonction tangentielle associée à π_a.*

Preuve : Le diviseur $\Gamma_a \subset \mathcal{S}$ est défini, dans l'ouvert $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_q$ et au voisinage de la fibre $\mathcal{S}_q$, par les équations $P_a(T) = T^{\boldsymbol{p}} - aT + \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z) = 0$ et $P_a(T - \frac{1}{z}) = T^{\boldsymbol{p}} - aT + \frac{a-c}{z} + O(z) = 0$, respectivement. En particulier, π_a et P_a sont 0-tangentiels si $a = c$ et 1-tangentiels si $a \neq c$. D'autre part, du fait que $\Theta_{0,m}(X, z) = \emptyset$ pour tout $0 < m < \boldsymbol{p}$ (cf. Proposition 1.7.1.), le Critère d'irréductibilité nous assure que P_a l'est. On voit également que l'automorphisme $(T, z) \in \mathcal{S} \mapsto (T + b, z) \in \mathcal{S}$ laisse Γ_a invariante, si $b^{\boldsymbol{p}} = a$. Cela implique que Γ_a est irréductible et que π_a est cyclique et étale au dessus de $X \setminus \{q\}$. Regardons à présent π_a le long de la fibre $\Gamma_a \cap \mathcal{S}_q$.

1. Si $a = c \neq 0$ alors $p_{\mathcal{S}} \notin \Gamma_a$ et π_a est partout étale. De plus, Γ_a est lisse, linéairement equivalent à $\boldsymbol{p}C_o$, et donc de genre $\boldsymbol{p}(g-1) + 1$ d'après la formule d'adjonction.
2. Si $a \notin \{c, 0\}$ alors $p_{\mathcal{S}} \in \Gamma_a$, où elle est lisse d'équation $z - azT^{1-\boldsymbol{p}} + (a-c)T^{-\boldsymbol{p}} + O(z^2)T^{-\boldsymbol{p}} = 0$. Il en résulte que z a un zéro d'ordre $\boldsymbol{p}$ en $p_{\mathcal{S}}$, donc π_a y est complètement ramifiée. De plus Γ_a est de genre $\boldsymbol{p}g$, car linéairement équivalente à $\boldsymbol{p}C_o + \mathcal{S}_q$, et κ_a satisfait l'équation $(\kappa_a + \frac{1}{z})^{\boldsymbol{p}} - a(\kappa_a + \frac{1}{z}) + \frac{a-c}{z} + O(z) = 0$. Il en résulte que κ_a est la fonction tangentielle associée à π_a et que $\kappa_a + \frac{1}{z}$ a un pôle simple en $p_{\mathcal{S}}$. Son inverse, noté λ_a, est alors une coordonnée locale en $p_{\mathcal{S}}$ telle que $\frac{c-a}{z} = \frac{1}{\lambda_a^{\boldsymbol{p}}} - \frac{a}{\lambda_a} + O(\lambda_a)$. Du fait que $\frac{1}{\lambda_a} := \kappa_a + \frac{1}{z}$, on obtient finalement $(a\text{-}c)\kappa_a = \frac{1}{\lambda_a^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{\lambda_a} + O(\lambda_a)$, i.e. : $p_{\mathcal{S}}$ est un point de Cartier de Γ_a. ■

Corollaire 1.16 (*tours infinies de revêtements* 1*-tangentiels*)
Supposons $\boldsymbol{p} > 0$ et $q \in X$ de Cartier. Soit $f \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(\boldsymbol{p}q)\big)$ avec développement de Laurent $f = \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z)$ et $(a_j)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{K} \setminus \{0, c\}$. En itérant le procédé ci-dessus à partir de $(\Gamma_0, r_0, \lambda_0) := (X, q, z)$, on obtient une tour $\{\pi_j : (\Gamma_j, r_j) \to (\Gamma_{j-1}, r_{j-1}),\ \ j \in \mathbb{N}^*\}$ de revêtements 1-tangentiels, munis pour tout $j \geq 1$ d'une fonction tangentielle $\kappa_j : \Gamma_j \to \mathbb{P}^1$. Il en résulte que le revêtement abélien $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_j : (\Gamma_j, r_j) \to (X, q)$ est 1-tangentiel, de genre $g\boldsymbol{p}^j$ et marqué en un point de Cartier ($\forall j \geq 2$), avec fonction tangentielle $\kappa_j + \pi_j^*(\kappa_{j-1}) + \cdots + (\pi_2 \circ \cdots \circ \pi_j)^*(\kappa_1)$.

Remarque 1.17
*Le résultat précédent est à l'opposé de la situation en caractéristique zéro. En effet, si $\boldsymbol{p} = 0$ et $g > 1$, l'existence d'un revêtement 1-tangentiel $\pi : (\Gamma, r) \to X$ ne peut avoir lieu que si $deg(\pi) = 2$, Γ et X sont hyperelliptiques et $q = \pi(r) \in X$ est un point de Weierstrass. Dans ce cas, $r \in \Gamma$ n'en est pas un. En particulier, s'il existe une tour de revêtements 1-tangentiels au dessus de (X, q), elle ne comporte qu'un seul étage, lequel doit avoir degré 2 ([**?**]-2.5).*

Références

[1] M. Baker, *Cartier Points on Curves*, Int. Math. Res. Not. **7**, 353-370 (2000).

[2] A. Treibich, *Tangential polynomials and Elliptic Solitons*, Duke Math.J. **59 :3**, 611-627 (1989).

[3] A. Treibich, *Matrix Elliptic Solitons*, Duke Math.J. **90 :3**, 523-547 (1997).

[4] A. Treibich, *Tangential polynomials and matrix KdV elliptic solitons*, http ://premat.fing.edu.uy/papers/2015/178.pdf (à paraître dans Funct. Anal. Appl.).