Introducción a los Sistemas Dinámicos

Martín Sambarino

Índice general

Capítulo 1

Dinámica Topológica

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico (de Hausdorff, métrico, completo, etc). Un *sistema dinámico discreto* en M es una $F : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua tal que:

1. $F(0, \cdot) = id$
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in M$.

Observación 1.1.1. Si definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $F_n : M \to M$ por $F_n(x) = F(n, x)$, tenemos que $F_n \circ F_m = F_{n+m}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$. En particular, $f = F_1$ es un homeomorfismo (su inversa es $f^{-1} = F_{-1}$) y se cumple que $F_n = f^n$. Por esto, un sistema dinámico discreto está generado por un homeo $f : M \to M$.

Definición 1.1.2. Un *sistema dinámico continuo* o *flujo* es una $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ continua tal que

1. $\varphi(0, \cdot) = id_M$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in M$.

Observación 1.1.2. Igual que en el caso continuo, si para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_t : M \to M$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.3. Sea $x \in M$.

1. Si $f : M \to M$ homeo, la *órbita* de x es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$.
   La *órbita futura* de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : \ n \geq 0\}$.
   La *órbita pasada* de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : \ n \leq 0\}$.

2. Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ flujo, la *órbita* de x es $\mathcal{O}(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   La *órbita futura* de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \geq 0\}$.
   La *órbita pasada* de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \leq 0\}$.

Ejemplos:

1. $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La identificación está dada por $exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, con $exp(t) = e^{2\pi i t}$.
   Definimos la *rotación de ángulo* α por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$ o, equivalentemente, $R_\alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+\alpha)}$.

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es C^1 tal que $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| < \infty$.
   Consideramos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. (1)
   Tenemos que $\varphi(t,x) = \varphi(t,0,x) =$ tiempo t de la solución de (1) que en 0 pasa por x es un flujo en Ω.

3. Sea M una variedad compacta y $X : M \to TM$ un campo de vectores tangentes de clase C^1. Usando cartas locales, encontramos que por cada $x \in M$, $\exists\,!\ \varphi_x : \mathbb{R} \to M$ tal que $\varphi_x(0) = x$ y $\dfrac{\partial \varphi_x(t)}{\partial t} = X(\varphi_x(t))$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
   Si definimos $\varphi(t,x) = \varphi_x(t)$ tenemos un flujo en M.

4. Sea $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección canónica. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de vectores tal que $X((x,y)+(n,m)) = X(x,y)$, $\forall\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ (X define un campo de vectores en $\mathbb{T}^2$). Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el flujo asociado a X en $\mathbb{R}^2$. Entonces, se cumple que $\varphi_t((x,y)+(n,m)) = \varphi_t(x,y) + (n,m)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathbb{R}^2, (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, ya que si definimos $\psi(t) = \varphi_t(x,y) + (n,m) \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}(t) = X(\psi(t)) \\ \psi(0) = (x,y) + (n,m) \end{cases}$
   Luego, $\varphi_t(x,y) + (n,m) = \varphi_t((x,y)+(n,m))$. Entonces $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\widetilde{\varphi}(t, \pi(x,y)) = \pi(\varphi(t,(x,y)))$ es un flujo en $\mathbb{T}^2$.
   Un caso particular muy importante es cuando $X = \text{cte} = (1,\alpha)$, donde $\varphi(t,x) = x + t(1,\alpha)$ y luego $\widetilde{\varphi}(t,\pi(x)) = \pi(\varphi(t,x))$ se llama *flujo lineal de pendiente* α en T^2.

Definición 1.1.4. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto.

- Un punto $p \in M$ se dice *fijo* si $f(p) = p$.
- Un punto $p \in M$ se dice *periódico* si existe $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. Se llama *período* de p al $\min\{k \geq 1 : \ f^k(p) = p\}$.

La definición para flujos es:

- Un punto $p \in M$ se dice *punto de equilibrio* (o *singularidad*) si $\varphi_t(p) = p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
- La órbita por $p \in M$ se dice *periódica* si existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$, para algún $t > 0$. Se llama *período* de p al $\min\{t > 0 : \ \varphi_t(p) = p\}$.

Definición 1.1.5. Si $f : M \to M$ es un sistema dinámico discreto y $x \in M$, definimos el ω-*límite* de x como

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \ \exists\, n_k \longrightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \longrightarrow y\}.$$

Análogamente, definimos el α-*límite* de x como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \ \exists\, n_k \longrightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \longrightarrow y\}.$$

Observación 1.1.3. $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$.

Las definiciones para flujos son:

$$\omega(x) = \{y \in M : \ \exists\, t_k \longrightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\} \text{ y}$$

$$\alpha(x) = \{y \in M : \ \exists\, t_k \longrightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\}$$

Observamos que

1. Si $f : M \to M$ y p es un punto periódico, entonces, $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo creciente y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\omega(x) = \emptyset$ o $\omega(x)$ es un punto fijo.

Definición 1.1.6. Un subconjunto $A \subset M$ se dice *invariante* si

$$\begin{cases} f(A) = A \text{ (caso s.d.d.)} \\ \varphi_t(A) = A, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ (caso flujo).} \end{cases}$$

Observación 1.1.4. Si A es invariante, entonces $f^m(A) = A$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.1.1. *$\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son conjuntos cerrados e invariantes.*

Demostración. Lo hacemos en el caso $f : M \to M$.
Observemos que $\omega(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) :\ n \geq k\}}$. Luego, $\omega(x)$ es cerrado.
Si $y \in \omega(x) \Longrightarrow \exists\, n_k \longrightarrow +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \longrightarrow y$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $f^{n_k+m}(x) \longrightarrow f^m(y) \Longrightarrow f^m(y) \in \omega(x)$.
La demostración para el caso de flujos es análoga. □

Proposición 1.1.2. *Sea φ flujo y $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ compacto. Entonces, $\omega(x)$ es conexo.*

Demostración. $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\varphi(t,x) :\ t \geq 0\}}$ es una intersección decreciente de compactos conexos. Luego, es conexa. □

Proposición 1.1.3. *Si $f : M \to M$ (con M espacio regular) y $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ es compacta, entonces $\omega(x)$ no se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados, no vacíos, disjuntos e invariantes. Es decir, si $\omega(x) = A \cup B$, con A, B cerrados e invariantes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que podemos escribir a $\omega(x) = A \cup B$, con $f(A) = A$ y $f(B) = B$, A y B cerrados, no vacíos y disjuntos. Sean U_1 y V_1 abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. Sea, $U = f^{-1}(U_1) \cap U_1$, $V = f^{-1}(V_1) \cap V_1$. Ambos son abiertos y disjuntos, $A \subset U$, $B \subset V$. Si $y \in U \Longrightarrow f(y) \in U_1$, y si $y \in V \Longrightarrow f(y) \in V_1$. Como $A \subset \omega(x) \Longrightarrow \exists\, n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$. Sea $m_1 = \text{mín}\{m > n_1 :\ f^m(x) \notin U\}$ (existe pues $B \subset \omega(x)$). Se verifica que $f^{m_1}(x) \notin V$ (ya que $f^{m_1}(x) \in U_1$). Análogamente, $\exists\, n_2 > m_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in U$. Sea $m_2 = \text{mín}\{m > n_2 :\ f^m(x) \notin U\}$. En general, dado $n_k > m_{k-1}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U$, construimos que $m_k = \text{mín}\{m > n_k :\ f^m(x) \notin U\}$.
Se verifica que: $\left\{ \begin{array}{c} m_k \longrightarrow +\infty \\ f^{m_k}(x) \in A^c \\ \overline{\mathcal{O}^+(x)} \text{ es compacto} \end{array} \right. \Longrightarrow \omega(x) \cap (U^c \cap V^c) \neq \emptyset$, y esto es un absurdo. □

Definición 1.1.7. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Un punto $x \in M$ es *no-errante* si $\forall\, U$ entorno de x, se tiene que $\exists\, n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un flujo, decimos que $x \in M$ es *no-errante* si $\forall\, U$ entorno de x, $\exists\, t \geq 1$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Notamos $\Omega(f) = \{x \in M : \ x \text{ es no errante}\}$, y lo llamamos *conjunto no errante.*

Observación 1.1.5.

- $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.
- Si p es periódico $\Longrightarrow p \in \Omega(f)$.
- Si $x \in M \Longrightarrow \begin{cases} \omega(x) \subset \Omega(f) \\ \alpha(x) \subset \Omega(f) \end{cases}$

Definición 1.1.8. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Definimos el conjunto límite de f como

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))}.$$

Observación 1.1.6. $Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$. (ver ejercicio 9)

Dinámica de la Rotación: Consideremos $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$. Distinguimos dos casos:

1. Caso $\alpha \in \mathbb{Q}$: sea $\alpha = \dfrac{p}{q}$, con $(p, q) = 1 \Longrightarrow R^q_\alpha(x) = x + p \equiv x \pmod 1$.

   Entonces, x es periódico (y de período q !). Luego, $\Omega(f) = S^1$ y todo punto es periódico con el mismo período.

2. Caso $\alpha \notin \mathbb{Q}$: primero observemos que R_α no tiene puntos periódicos: si $R^n_\alpha(x) = x \Longrightarrow x + n\alpha \equiv x \pmod 1 \Longrightarrow n\alpha \equiv 0 \pmod 1 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$. Sea $x \in S^1 \Longrightarrow \omega(x) \subset S^1$ compacto e invariante. Supongamos que $\omega(x) \subsetneq S^1 \Longrightarrow S^1 \backslash \omega(x) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$, donde cada I_j es una componente conexa de $S^1\backslash\omega(x)$. Observemos que como R_α es un homeo, tenemos que $R_\alpha(I_n) = I_{n'}$ con $n \neq n'$. Más aún: $R^n_\alpha(I_j) \cap R^m_\alpha(I_j) = \emptyset$, $\forall\ n, m$ tales que $n \neq m$ (de lo contrario, existiría un punto periódico). Sin embargo, $|R^n_\alpha(I_j)| = |R^m_\alpha(I_j)|$, ya que R_α es un movimiento rígido.

   Conclusión: $\omega(x) = S^1$, $\forall\ x \in S^1$. Es decir, $\Omega(R_\alpha) = S^1$ y toda órbita (futura) es densa.

Dinámica del Flujo Lineal en $\mathbb{T}^2$: Tenemos el campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $X_\alpha(x) = (1, \alpha)$. Luego, $\varphi^\alpha_t = x + t(1, \alpha)$ es el flujo de X_α en el plano. Sea $\widetilde{\varphi^\alpha_t}(x) = \pi(\varphi^\alpha_t)$ el flujo lineal en $\mathbb{T}^2$.
Observamos que $\{0\} \times S^1$ es transversal al flujo (i.e., todas las órbitas cortan (transversalmente) a $\{0\}\times S^1$. Si $x \in \{0\}\times S^1$, fijémonos en el "primer retorno",

es decir, la primera vez (en el futuro) en que la órbita por x corta a $\{0\} \times S^1$. Vemos que $\varphi_1(0,x) = (0,x)+(1,\alpha) = (1, x+\alpha)$. Luego, $R(x) = (x+\alpha) \pmod 1$. Es decir, el retorno es la rotación de ángulo α.

Conclusión:

1. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\widetilde{\varphi_t^\alpha}$ son periódicas. $\Omega(\widetilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x)$.

2. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\widetilde{\varphi_t^\alpha}$ son densas. $\Omega(\widetilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathbb{T}^2$, $\forall\, x$.

Corolario 1.1.1. *Si r es una recta de pendiente irracional en $\mathbb{R}^2$, entonces $\pi(r)$, su proyección en T^2, es densa.*

Definición 1.1.9. $x \in M$ se dice *recurrente* en el $\begin{cases} \textit{futuro} \\ \textit{pasado} \end{cases}$ si $\begin{cases} x \in \omega(x) \\ x \in \alpha(x) \end{cases}$.
Si x es recurrente en el futuro y en el pasado, decimos que x es *recurrente*.

Ejemplos:

1. Si p es periódico $\Longrightarrow$ p es recurrente.

2. Todo punto es recurrente según la rotación R_α, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Todo punto es recurrente según el flujo lineal $\widetilde{\varphi}^\alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. **Flujo lineal reparametrizado con una única singularidad:**
Si tenemos un campo X en M y $a : M \to \mathbb{R}$ es una función positiva, entonces el flujo determinado por $Y(x) = a(x)X(x)$ tiene las mismas órbitas que X (pero recorridas con diferente velocidad). Si $a : M \to \mathbb{R}$, con $a(x) \geq 0$ y $a(x) = 0$ sólo en $x = x_0$, tenemos que $Y(x) = a(x)X(x)$ presenta una singularidad en x_0. La órbita de X que pasa por x_0 se divide ahora en tres órbitas según Y: $\begin{cases} \{\varphi_t^X(x_0) :\ t < 0\} \\ x_0 \\ \{\varphi_t^X(x_0) :\ t > 0\} \end{cases}$. Sean $X = (1,\alpha)$ y $p \in \mathbb{T}^2$. Sea $a : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $a(x) \geq 0$ y $a(x) = 0$ sii $x = p$ y consideramos $Y(x) = a(x)(1,\alpha) = a(x)X(x)$. Denotamos por ψ^α el flujo de Y en $\mathbb{T}^2$ y sea φ^α el flujo lineal en $\mathbb{T}^2$. Distinguimos dos casos:
Caso 1: $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces:

a) Si $p \notin \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x)$, y luego x tiene órbita periódica según Y, i.e., $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \mathcal{O}_Y(x)$.

b) Si $x \in \mathcal{O}_X(p)$ y $x \neq p \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(p) \backslash \{p\}$. Concluimos que $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \{p\}$.

c) $\mathcal{O}_Y(p) = \{p\}$

Conclusión 1.1.1. $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$ (ya que $\Omega(\psi^\alpha)$ es cerrado y contiene las órbitas periódicas, que son densas). Sin embargo, hay puntos que no son recurrentes ni en el pasado ni en el futuro.

Caso 2: $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces:

a) Si $p \notin \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \omega_Y(x) = \alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$.

b) Si $x = \varphi_t^\alpha(p)$ para algún $t > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : \ t > 0\}$ y además $\alpha_Y(x) = \{p\}$ y $\omega_Y(x) = \mathbb{T}^2$.

c) $x = \varphi_t^\alpha(p)$ para algún $t < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : \ t < 0\}$ y además $\alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$ y $\omega_Y(x) = \{p\}$.

Conclusión 1.1.2. $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$. Hay puntos recurrentes en el futuro que no lo son en el pasado y hay puntos recurrentes en el pasado que no lo son en el futuro.

1.2. Conjuntos minimales

Definición 1.2.1. Consideremos un s.d en M. Un subconjunto $G \subset M$ es *minimal* (según el s.d) si:

1. G es cerrado e invariante

2. G no contiene ningún subconjunto propio no vacío que sea cerrado e invariante (i.e. si $A \subset G$, $A \neq \emptyset$, A cerrado e invariante $\Longrightarrow A = G$).

Proposición 1.2.1. *$G \subset M$ es minimal $\Longleftrightarrow \overline{\mathcal{O}(x)} = G$, $\forall\, x \in G$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$)$\overline{\mathcal{O}(x)}$ es cerrado e invariante y $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset G \Longrightarrow \overline{\mathcal{O}(x)} = G$.
($\Longleftarrow$) Sea $A \subset G$ cerrado e invariante y no vacío. Sea $x \in A$. Entonces $G = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset A \subset G \Longrightarrow A = G$.

□

Proposición 1.2.2. *Sea $G \subset M$ subconjunto compacto. Entonces, G minimal $\Longleftrightarrow \omega(x) = G$, $\forall\, x \in G \Longleftrightarrow \alpha(x) = G$, $\forall\, x \in G$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si $x \in G$ con G compacto, entonces $\omega(x) \neq \emptyset \Longrightarrow \omega(x)$ es cerrado, invariante y $\omega(x) \subset G$. Luego, $\omega(x) = G$.
($\Longleftarrow$) Sea $A \subset G$ cerrado e invariante y no vacío, y sea $x \in A$. Entonces, $G = \omega(x) \subset A \subset G \Longrightarrow A = G$. □

Ejemplos:

1. Si x es periódico $\Longrightarrow \mathcal{O}(x)$ es minimal.
2. $R_\alpha : S^1 \to S^1$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $G \subset S^1$ minimal $\Longrightarrow G = \mathcal{O}(x)$, órbita periódica.
3. $R_\alpha : S^1 \to S^1$, con $\alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow S^1$ es minimal (y es el único).
4. Si $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un flujo lineal con $\alpha \in \mathbb{Q}$, y $G \subset \mathbb{T}^2$ es minimal $\Longrightarrow G = \mathcal{O}(x)$ órbita periódica.
5. Si $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un flujo lineal con $\alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathbb{T}^2$ es minimal.
6. Si $\psi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es el flujo lineal reparametrizado con una singularidad en p y $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces el único minimal es $\{p\}$.

Observación 1.2.1. Si G es minimal no compacto, no es válida la proposición anterior. Si ψ_t^α es como en 6. y consideramos $M = T^2 \backslash \{p\} \Longrightarrow M$ es minimal (todas las órbitas son densas) pero hay puntos tales que $\omega(x) = \emptyset$.

Corolario 1.2.1. *Si G es minimal compacto, entonces toda órbita de $x \in G$ es recurrente.*

Proposición 1.2.3. *Sea M un espacio topológico compacto y sea $f : M \to M$ un s.d. en M. Entonces, existe algún punto recurrente.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset M :\ F \text{ es cerrado e invariante}, F \neq \emptyset\}$. Como $M \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ordenamos parcialmente a $\mathcal{F}$ así: $F_1 \leq F_2 \Longleftrightarrow F_1 \supset F_2$. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una cadena $\Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$ y es cerrado e invariante. Luego, por el lema de Zorn, $\exists\, G$ elemento maximal. Por definición del orden, G es un conjunto minimal compacto. Luego, toda órbita de G es recurrente. □

Definición 1.2.2. Un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ se dice *relativamente denso* (o *sindético*) si existe $m > 0$ tal que $[n, n+m] \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Análogamente, definimos conjunto relativamente denso en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.3. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto y sea $p \in M$. Decimos que p es *fuertemente recurrente* si dado $U(p)$ entorno de p se tiene que $\{n \in \mathbb{Z} : \ f^n(p) \in U(p)\}$ es relativamente denso. (Análogamente para flujos.)

Observación 1.2.2. Si p es fuertemente recurrente, entonces p es recurrente.

Teorema 1.2.1. ***(Birkhoff)*** *Sea M un espacio topológico (regular). Sea $p \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(p)}$ compacto. Entonces p es fuertemente recurrente $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathcal{O}(p)}$ es minimal (compacto).*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$ es minimal (compacto). Sea $U(p)$ entorno de p y sea $x \in G \Longrightarrow \exists\, n(x)$ tal que $f^{n(x)}(x) \in U(p)$. Por continuidad, $\exists\, V(x)$ tal que si $y \in V(x) \Longrightarrow f^{n(x)}(y) \in U(p) \Longrightarrow G \subset \bigcup\limits_{x \in G} V(x)$. Como G es compacto, entonces $G \subset \bigcup\limits_{1}^{n} V(x_i)$, para ciertos $x_1, ..., x_n$. Sea $m = \text{máx}\{n(x_i) : \ 1 \leq i \leq n\}$. Luego, si $x \in G \Longrightarrow \exists\, n(x)$, con $0 \leq n(x) \leq m$ tal que $f^{n(x)}(x) \in U(p)$. Luego, $\{n : \ f^n(p) \in U(p)\}$ es relativamente denso.

($\Longrightarrow$) Sea $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$ y supongamos que G no es minimal. Sea $A \subset G$ cerrado, invariante y no vacío tal que $A \subsetneq G \Longrightarrow p \notin A$. Sea $U(p)$ entorno de p y V abierto, $A \subset V$ tal que $U(p) \cap V = \emptyset$. Como p es fuertemente recurrente $\Longrightarrow \exists\, m$ tal que para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, $\exists\, n$ con $j \leq n \leq j+m$ tal que $f^n(p) \in U$. Sea $V_1 = f^{-m}(V) \cap f^{-(m-1)}(V) \cap \ldots \cap V$. Luego, V_1 es un abierto que contiene a A. Por otra parte, si $x \in V_1 \Longrightarrow x, f(x), \ldots, f^m(x) \in V$. Como $A \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$, $\exists\, j$ tal que $f^j(p) \in V_1$. Luego $f^j(p), f^{j+1}(p), \ldots, f^{j+m}(p) \in V \Longrightarrow f^j(p), f^{j+1}(p), \ldots, f^{j+m}(p) \notin U(p)$. Absurdo. $\square$

Definición 1.2.4. Sean M un espacio métrico y $f : M \to M$ un s.d. Un punto $p \in M$ se llama *casi-periódico* si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, S \subset \mathbb{Z}$ relativamente denso tal que si $s \in S \Longrightarrow d(f^n(p), f^{n+s}(p)) < \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
(Para flujos se define de manera análoga.)

Definición 1.2.5. Sean M un espacio métrico y $G \subset M$ un subconjunto invariante. Decimos que G es *estable (estable en el futuro, estable en el pasado) según Lyapunov* si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x, y \in G$; $d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ ($\forall\ n \geq 0$, $\forall\ n \leq 0$).

Proposición 1.2.4. *Sea $f : M \to M$ s.d y G minimal compacto. Entonces, G es estable Lyapunov $\Longleftrightarrow$ p es casi-periódico, $\forall\ p \in G$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \delta(\varepsilon)$ de la estabilidad. Como G es minimal compacto $\Longrightarrow p$ es fuertemente recurrente. Luego $S = \{n : \ f^n(p) \in B(p,\delta)\}$ es relativamente denso. Sea $s \in S \Longrightarrow d(f^s(p), p) < \delta \Longrightarrow d(f^{n+s}(p), f^n(p)) < \varepsilon$, $\forall\ n \in Z$ (esto último es por la estabilidad). Luego, p es casi-periódico.

($\Longleftarrow$) Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in G$ casi periódico. Entonces, $\exists\ S \subset \mathbb{Z}$ relativamente denso tal que si $s \in S \Longrightarrow d(f^{n+s}(p), f^n(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, p es fuertemente recurrente y G es minimal. Sea $q \in G \Longrightarrow \exists\ n_j \longrightarrow +\infty$ tal que $f^{n_j}(p) \longrightarrow q$. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $s \in S$. Entonces, $f^{n_j+n+s}(p) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f^{n+s}(q) \Longrightarrow f^{n_j+n}(p) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f^n(q) \Longrightarrow d(f^{n+s}(q), f^n(q)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\forall\ s \in S$.

Como S es relativamente denso, $\exists\ m$ tal que $[n, n+m] \cap S \neq \emptyset$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Sea $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f^i(x), f^i(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ si $0 \leq i \leq m$. Ahora, tomemos x, y tales que $d(x,y) < \delta$ y $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow n = s + k$ para algún $s \in S$ y $0 \leq k \leq m \Longrightarrow d(f^n(x), f^n(y)) = d(f^{s+k}(x), f^{s+k}(y)) \leq d(f^{s+k}(x), f^k) + d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^{s+k}(y)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Longrightarrow G$ es estable Lyapunov. $\square$

1.3. Transitividad

Definición 1.3.1. Sean M espacio topológico y $f : M \to M$ un s.d. Decimos que f es *transitivo* si $\exists\ x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

Observación 1.3.1. Si M no es discreto, entonces f es transitivo $\Longleftrightarrow \exists\ x$ tal que $\omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Obvio.
($\Longrightarrow$) Como M no es discreto y $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$, concluimos que $x \in \omega(x)$ o $x \in \alpha(x)$. Entonces, $\mathcal{O}(x) \subset \omega(x)$ o $\mathcal{O}(x) \subset \alpha(x)$. $\square$

Proposición 1.3.1. *Sean M espacio métrico completo (separable) sin puntos aislados y $f : M \to M$ un s.d. Son equivalentes:*

1. *f es transitivo*
2. *dados A y B abiertos $\exists\, n \geq 0$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*
3. *$\exists\, R_1$ residual tal que $\omega(x) = M$, $\forall\, x \in R_1$.*
4. *$\exists\, R_2$ residual tal que $\alpha(x) = M$, $\forall\, x \in R_2$.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Sea $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M \Longrightarrow \omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$. Supongamos que $\alpha(x) = M \Longrightarrow \exists\, n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in B$ y $\exists\, n_2$, con $n_2 < n_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in A \Longrightarrow f^{n_1 - n_2}(A) \cap B = \emptyset$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $\{B_n : \ n \geq 1\}$ una base numerable de la topología. Definimos $A_n = \{y \in M : \ f^m(y) \in B_n \text{ para algún } m \geq 0\}$. Luego, A_n es abierto y denso (por 2)). Tenemos que $R_1 = \bigcap_n A_n$ es residual. Sea $x \in R_1$ y sea U abierto $\Longrightarrow \exists\, n$ tal que $B_n \subset U$. Luego, como $x \in A_n$, $\forall\, n$ tenemos que $\exists\, m$ tal que $f^m(x) \in B_n \subset U \Longrightarrow \omega(x) = M$.

3) $\Longrightarrow$ 1) obvio.

La equivalencia con 4) es $1), 2), 3)$ con $g = f^{-1}$. □

Corolario 1.3.1. *$f : M \to M$ es transitivo $\Longleftrightarrow$ si $A \subset M$ es abierto, transitivo e invariante entonces $\overline{A} = M$.*

Observación 1.3.2. Si $f : M \to M$ es transitivo y $\varphi : M \to M$ continua es tal que $\varphi \circ f = \varphi \Longrightarrow \varphi = cte$.

Demostración. Sea x_0 tal que $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = M \Longrightarrow \varphi(f^n(x_0)) = \varphi(x_0)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ φ es constante en un conjunto denso $\Longrightarrow \varphi = cte$. □

Proposición 1.3.2. *Sea $\mathrm{T} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $\mathrm{T}(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$ (mod $\mathbb{Z}^2$). Entonces T es transitivo $\Longleftrightarrow \alpha, \beta, 1$ son racionalmente independientes, i.e. $\nexists\, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tal que $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$. (ver ejercicio 17!)*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tal que $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$. Sea $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = \sin(2\pi(k_1 x + k_2 y))$. Luego, φ

es continua y no constante. Ahora, $\varphi \circ \mathrm{T}(x, y) = \varphi(x+\alpha, y+\beta) = \sin(2\pi(k_1 x + k_2 y + k_1\alpha + k_2\beta)) = \sin(2\pi(k_1 x + k_2 y) + 2\pi k) = \sin(2\pi(k_1 x + k_2 y)) = \varphi(x, y) \Longrightarrow$ T no es transitivo.

($\Longleftarrow$) Sea U abierto e invariante y desarrollamos la función característica de U en serie de Fourier:

$$\chi_U(x_1, x_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1x_1 + k_2x_2)) \text{ ctp.}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\chi_U(T(x_1, x_2)) &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_1\alpha + k_2\beta)) \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1\alpha + k_2\beta) \exp(2\pi i(k_1x_1 + k_2x_2)).\end{aligned}$$

Como $\chi_U \circ \mathrm{T} = \chi_U$ por ser U invariante y por la unicidad de la serie de Fourier concluimos que $\alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1\alpha+k_2\beta) = \alpha_{k_1k_2}, \forall\ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Como $k_1\alpha + k_2\beta \notin \mathbb{Z}$, $\forall\ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\}$, concluimos que $\alpha_{k_1k_2} = 0$, $\forall\ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Luego $\chi_U(x_1, x_2) = \alpha_{00}$, i.e. $\chi_U = cte$ (ctp) $\Longrightarrow \overline{U} = T^2 \Longrightarrow$ T es transitivo. $\square$

1.4. Un ejemplo caótico: shift de Bernoulli

Definición 1.4.1. Sea M un espacio métrico y $f : M \to M$ un homeo. Decimos que f es *expansivo* si $\exists\ \alpha > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, $\forall\ n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = y$ (α es llamada constante de expansividad).

Definición 1.4.2. Sea $f : M \to M$ un homeo. Decimos que f es topológicamente mixing si dados U, V abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset\ \forall n \geq m$.

Veamos un ejemplo que, entre otras propiedades, es expansivo y topológicamente mixing.

Sea $M = \Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. En $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y dotamos a Σ con la topología producto. Luego, Σ es compacto. Si definimos $d(\{x_n\}, \{y_n\}) =$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$, obtenemos una métrica en Σ compatible con la topología. Dado $\{x_n\} \in \Sigma$ y $N \in \mathbb{N}$, definimos el N-entorno de $\{x_n\}$ como

$$N(\{x_n\}) = \{\{y_n\} \in \Sigma : \ y_n = x_n \text{ si } |n| \leq N\}.$$

Se verifica que $N(\{x_n\})$ constituye una base de entornos de $\{x_n\}$. Definimos el *shift a la izquierda* o *shift de Bernoulli* (de dos símbolos) al homeomorfismo $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$ donde $y_n = x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.4.1. *Sea $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift de Bernoulli. Entonces:*

1. *σ es expansivo*
2. *$\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$*
3. *σ es transitivo y topológicamente mixing.*
4. *Para cualquier $\{x_n\} \in \Sigma$ su conjunto estable*

$$W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

e inestable

$$W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \underset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

son ambos densos en Σ.

Demostración. 1. Si $\{x_n\} \neq \{y_n\} \implies \exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m \neq y_m \implies d(\sigma^{-m}(\{x_n\}), \sigma^{-m}(\{t_n\})) \geq 1$. Luego, cualquier $\alpha < 1$ es constante de expansividad.

2. Sea $\{x_n\} \in \Sigma$ cualquiera y fijemos un N entorno de $\{x_n\}$. Definimos $\{y_n\}$ como $y_n = x_n$ si $|n| \leq N$ y de forma periódica, es decir, $y_{k(2N+1)+j} = y_j$ si $-N \leq j \leq N$.

3. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos puntos de Σ y fijemos U, un N_1 entorno de $\{x_n\}$, y V, un entorno N_2 de $\{y_n\}$. Tomemos $m > N_1 + 2N_2 + 1$ y sea $k \geq m$ cualquiera. Definimos $\{z_n\}$ tal que: $z_n = x_n$ si $|n| \leq N_1, z_{k+n} = y_n$ si $|n| \leq N_2$. Resulta entonces que $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

4. Basta observar $W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ y_n = x_n,\ \forall\, n \geq k$ para algún $k \in \mathbb{Z}\}$ y $W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ y_n = x_n,\ \forall\, n \leq k$ para algún $k \in \mathbb{Z}\}$.

$\square$

1.5. Equivalencia dinámica

Terminamos este capítulo definiendo cuando dos sistemas dinámicos son "iguales".

Definición 1.5.1. Sean $f, g : M \to M$ dos sistemas dinámicos. Decimos que son conjugados si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Para el caso de flujos tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.5.2. Sean ϕ_t, ψ_t dos flujos en M. Decimos que son conjugados si existe $h : M \to M$ homeomorfismo tal que $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se dice que los flujos ϕ_t, ψ_t son orbitalmente equivalentes si existe $h : M \to M$ tal que $h(\mathcal{O}_{\phi_t}(x)) = \mathcal{O}_{\psi_t}(h(x))$.

La conjugación entre sistemas dinámicos preserva todas las propiedades dinámicas que se vieron en este capítulo:

Teorema 1.5.1. *Sea M compacto y sean $f : M \to M$ y $g : M \to M$ dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo $h : M \to M$ Entonces:*

1. *p es periódico por f sii $h(p)$ es periódico por g.*
2. *p es recurrente por f sii $h(p)$ es recurrente por g.*
3. $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$.
4. *G es minimal por f sii $h(G)$ es minimal por g.*
5. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.
6. *f es transitivo sii g es transitivo.*
7. *f es topológicamente mixing sii g es topológicamente mixing.*

Demostración. ver lista de ejercicios. □

1.6. Ejercicios

1. Describir la dinámica de un flujo en S^1.

2. Sea M un espacio métrico compacto. Sean $f : M \to M$ y $g : M \to M$ dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo $h : M \to M$ (esto es, $h \circ f = g \circ h$). Probar que:

   a) p es periódico por f sii $h(p)$ es periódico por g.

   b) p es recurrente (respec. fuertemente recurrente, casi periódico) por f sii $h(p)$ es recurrente (respec. fuertemente recurrente, casi periódico) por g.

   c) G es minimal por f sii $h(G)$ es minimal por g.

   d) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

   e) Se define el conjunto estable de un punto x como $W^s(x, f) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\}$ y el inestable como $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$. Mostrar que $h(W^s(x, f)) = W^s(h(x), g)$ y análogamente para el conjunto inestable.

3. Sea M un espacio métrico compacto. Sean $\phi : \mathbb{R}\times M \to M$ y $\psi : \mathbb{R}\times M \to M$ dos flujos. Se dicen que son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ que lleva órbitas de un flujo en órbitas del otro, esto es $h(\mathcal{O}(x, \phi)) = \mathcal{O}(h(x), \psi)$. Si además se cumple que $h\circ\phi_t = \psi_t\circ h \ \forall t \in \mathbb{R}$ se dicen que son conjugados. Cuáles de las propiedades del ejercicio anterior se conservan para flujos equivalentes y cuáles para flujos conjugados?

4. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo. Mostrar que $\Phi_{/\mathbb{Z}\times M}$ es un sistema dinámico discreto ($f = \Phi_1$ se llama "tiempo 1" del flujo).

   b) Demostrar que si $f : M \to M$ es el tiempo 1 de un flujo entonces es isotópico a la identidad (dos homeos f_0, f_1 de M son isotópicos si existe $F : M \times [0, 1] \to M$ continua tal que $F(., 0) = f_0, F(., 1) = f_1$ y $F(., t) : M \to M$ es un homeo para cualquier $t \in [0, 1]$.

   c) Encontrar un ejemplo de un sistema dinámico discreto que no sea el tiempo 1 de ningún flujo.

5. Sea M un espacio topológico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo. En $M \times \mathbb{R}$ se considera el flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ dado por $\Phi(t, (x, s)) = (x, t + s)$. En $M \times \mathbb{R}$ se considera la siguiente relación:

$$(x, s_1) \sim (y, s_2) \Longleftrightarrow s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } f^{s_1-s_2}(x) = y.$$

a) Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Sea $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}/\sim$ y $\Pi : M \times \mathbb{R} \to \tilde{M}$ la proyección canónica. Se considera $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ dada por $\tilde{\Phi}(t, \Pi(x,s)) = \Pi(\Phi(t,(x,s)))$. Mostrar que $\tilde{\Phi}$ esta bien definida y que es un flujo en $\tilde{M}$. (este flujo se llama flujo suspensión de f.)

c) Mostrar que $\tilde{M}_t = \Pi(M \times \{t\})$ es homeomorfo a M y que $\tilde{\Phi}_1$ deja invariante $\tilde{M}_t$ y es conjugado a $f : M \to M$.

d) Si $M = S^1$ y $f : M \to M$ es la rotación de ángulo α, R_α, identificar $\tilde{M}$ y $\tilde{\Phi}$.

e) Si $M = S^1$ y $f : S^1 \to S^1$ es $f(x) = -x(mod 1)$, identificar $\tilde{M}$.

6. *a*) Sea G un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Probar que G es discreto ($G = d\mathbb{Z}$) o que G es denso en $\mathbb{R}$. (sug: considerar $d = \inf\{g \in G : g > 0\}$)

   b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G_\alpha = \{n\alpha + m; n, m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que G_α es discreto sii $\alpha \in \mathbb{Q}$.

   c) Sea $R_\alpha : S^1 \to S^1, R_\alpha(x) = x + \alpha(mod 1)$. Verificar que la órbita de x por R_α es $\Pi(x + G_\alpha)$ donde $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la proyección canónica. Deducir de aquí la dinámica de R_α.

7. Dar un ejemplo de un flujo en $\mathbb{R}^2$ tal que $\omega(x)$ no es conexo para algún $x \in \mathbb{R}^2$.

8. Encontrar ejemplos de:

   a) Puntos no errantes que no sean recurrentes.

   b) Puntos recurrentes que no sean fuertemente recurrentes.

9. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Definimos los conjuntos $L^+(f) = \overline{\cup_{x \in M}\omega(x)}$, $L^-(f) = \overline{\cup_{x \in M}\alpha(x)}$ y $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$. Denotamos por $Per(f)$ es conjunto de los puntos periódicos de f. Demostrar que $Per(f) \subset L^+(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$. Encontrar ejemplos donde estas inclusiones sean estrictas.

10. a) Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Probar que si $\mathcal{O}(x)$ es compacto entonces x es periódico. (sug: si x no es aislado en $\mathcal{O}(x)$ entonces $\mathcal{O}(x)$ es perfecto.)

    b) Probar resultado análogo para flujos (sug: si la órbita por x no es fija ni periódica encontrar q_n, ϵ_n y $t_n \to \infty$ tales que $B(q_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subset B(q_n, \epsilon_n)$ y $\overline{B(q_n, \epsilon_n)} \cap \{\Phi_t(x) : -t_n \leq t \leq t_n\} = \emptyset$).

11. Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Un punto $p \in M$ se dice que es uniformemente fuertemente recurrente si dado $\epsilon > 0$ existe L tal que el conjunto $\{m \in \mathbb{Z} : d(f^m(p), q) < \epsilon\}$ es L-relativamente denso cualquiera sea q en la orbita de p.

    a) Probar que si la órbita de un punto p tiene clausura compacta, entonces p es fuertemente recurrente sii es uniformemente fuertemente recurrente.

    b) Si p es uniformemente fuertemente recurrente, entonces la órbita de p es un conjunto totalmente acotado.

    c) Probar que p es uniformemente fuertemente recurrente sii la clausura de la órbita de p es un minimal compacto.

    d) Si p es casi-periódico entonces p es uniformemente fuertemente recurrente.

12. Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Decimos que p es estable en el futuro (según Lyapunov) si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, y) < \delta \implies d(f^n(p), f^n(y)) < \epsilon \ \forall n \geq 0$. Probar que si p es fuertemente recurrente y estable en el futuro entonces es casi-periódico.

13. Un minimal compacto puede ser estable en el futuro y no serlo en el pasado?

14. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Probar que si f es transitivo y M estable según Lyapunov entonces M es minimal.

15. Sea M espacio métrico compacto y $f : M \to M$ un homeo. Mostrar que M es estable Lyapunov sii la familia $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es equicontinua.

16. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de período 1. Probar que $\int_s^{s+1} \Phi(t)dt = \int_0^1 \Phi(t)dt$.

    b) Considere $R_\alpha : S^1 \to S^1$ rotación con α irracional y sea $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}$ continua. Probar que Φ_n definida por

    $$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi(R_\alpha^j(x))$$

    converge uniformemente a una constante (sug: usar Arzela-Ascoli y que las integrales de Φ_n son todas iguales).

17. Decimos que G es un grupo topológico si es un espacio topológico y a la vez un grupo donde las operaciones del grupo (multiplicación e inverso) son funciones continuas. Sea $g \in G$ un elemento y considere la multiplicación a izquierda $L_g : G \to G,\ L_g(g') = gg'$.

    a) Probar que L_g es transitivo sii G es minimal por L_g.

    b) Si G es compacto, probar que todo punto es recurrente.

18. Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Decimos que f es distal si dados dos puntos $x \neq y$ existe $\epsilon > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

    a) Si M es estable Lyapunov probar que f es distal.

    b) Sea $f : T^2 \to T^2$ dado por $f(z, w) = (z + \alpha, z + w)$ con α irracional. Probar que f es distal, que T^2 no es estable Lyapunov pero que T^2 es minimal. Concluir que todas las órbitas son fuertemente recurrentes pero no casi-periódicas.

19. Sea N un espacio topológico, $f : N \to N$ un homeo, K un grupo topológico compacto y $\phi : N \to K$ una aplicación continua. Definimos un sistema dinámico (llamado "skew product") en $M = N \times K$ dado por $F(y, k) = (f(y), \phi(y)k)$.

    a) Si definimos $R_g : M \to M$ por $R_g(y, k) = (y, kg)$ probar que $R_g \circ F = F \circ R_g$. Concluir que si $(y, k) \in \omega(y_0, k_0)$ entonces $(y, kg) \in \omega(y_0, k_0 g)$.

b) Probar que si $y_0 \in N$ es recurrente por f entonces (y_0, k) es recurrente por F para todo $k \in K$. (Sug: probarlo primero para la identidad).

c) Si N es minimal para f, es M minimal para F.?

d) Considere $F : T^2 \to T^2$ dado por $F(z, w) = (z + \alpha, w + 2z + \alpha)$. Mostrar que $(0, 0)$ es recurrente y concluir que para todo número real α y $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofántica $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$.

e) Si $p(x)$ es un polinomio real con $p(0) = 0$, mostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofántica $|p(n) - m| < \epsilon$. (sug: si d es el grado de p considerar $F : T^d \to T^d, F(z_1, ..., z_d) = (z_1 + \alpha, z_2 + z_1, ..., z_d + z_{d-1})$ y los polinomios $p_d = p, p_{i-1}(x) = p_i(x+1) - p_i(x)$. Quién es $F^n(p_1(0), ..., p_d(0))$.?

Capítulo 2

Dinámica en S^1

Definimos el círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\pi(x) = x \pmod 1$ la proyección canónica. Identificamos el círclo con $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ y $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Trabajaremos con ambas nociones indistintamente.

Proposición 2.0.1. *Sean $f : S^1 \to S^1$ continua, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \pi^{-1}(f(\pi(x_0)))$. Entonces, existe una única $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que:*

1. $F(x_0) = y_0$
2. $\pi \circ F = f \circ \pi$

Definición 2.0.1. Una $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica $\pi \circ F = f \circ \pi$ se llama *levantamiento* de f.

Observación 2.0.1. Si F_1 y F_2 son dos levantamientos de f, entonces $F_1(x) = F_2(x) + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. $F_1 - F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es continua. □

Observación 2.0.2. Sea F levantamiento de f. Entonces de $\pi \circ F = f \circ \pi$ se deduce que $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+1) = F(x) + m$. Este m no depende del levantamiento.

Definición 2.0.2. Llamamos $deg(f)$ al entero m tal que $F(x+1) = F(x) + m$, donde F es un levantamiento de f.

Observación 2.0.3. Si $f : S^1 \to S^1$ es un homeo que preserva orientación (que denotaremos por $f \in Hom_+(S^1)$) y F es un levantamiento de f. Entonces:

1. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeo creciente
2. $deg(f) = 1$
3. $F - id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de período 1.

Teorema 2.0.1 (Poincaré)**.** *Sean $f \in Hom_+(S^1)$ y F un levantamiento. Entonces, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F^n(x)}{n}$ y es independiente de x.*

Demostración. 1. independencia de x:

Basta observar que si $|x - y| \leq k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow |F^n(x) - F^n(y)| \leq k$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Luego, $\left|\dfrac{F^n(x)}{n} - \dfrac{F^n(y)}{n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. existencia del límite:

Para $m \in \mathbb{Z}$ afirmamos que $\forall\, m \Longrightarrow \exists\, p_m \in \mathbb{Z}$ tal que $p_m \leq F^m(x) - x \leq p_m + 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.[1] Como $F^m - Id$ es periódica de período 1 basta verificar lo anterior para $x \in [0, 1]$. Sea $k = \min\{n \in Z : n \geq F^m(1)\}$. Sea $p_m = k - 3$. Ahora para $x \in [0, 1]$ tenemos que

$$F^m(x) - x \leq F^m(1) - 0 \leq p_m + 3 \text{ y } F^m(x) - x \geq F^m(0) - 1 \geq k - 2 - 1 = p_m.$$

$$\begin{array}{llcc}
\text{Tomamos} & x = 0 & \longrightarrow & p_m \leq F^m(0) \leq p_m + 3 \\
 & x = F^m(0) & \longrightarrow & p_m \leq F^{2m}(0) - F^m(0) \leq p_m + 3 \\
\text{Luego,} & \vdots & & \vdots \\
 & x = F^{(n-1)m} & \longrightarrow & p_m \leq F^{nm}(0) - F^{(n-1)m}(0) \leq p_m + 3 \\
\text{sumamos} & & \longrightarrow & np_m \leq F^{nm}(0) \leq n(p_m + 3)
\end{array}$$

Luego,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^{nm}(0)}{nm} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m}.$$

Como además,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^m(0)}{m} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m},$$

entonces

$$\left|\frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^m(0)}{m}\right| \leq \frac{3}{m}.$$

[1] En realidad existe $p_m \in \mathbb{Z}$ tal que $p_m < F^m(x) - x < p_m + 2$ ya que se puede probar que $(F^m - id)(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Z}$ consiste a lo sumo de un solo punto (ejercicio).

Intercambiando los roles de m y n, obtenemos:

$$\left|\frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n}\right| \leq \frac{3}{n},$$

de donde

$$\left|\frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n}\right| \leq \frac{3}{m} + \frac{3}{n}.$$

Luego, $\left\{\frac{F^n(0)}{n}\right\}$ es una sucesión de Cauchy $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F^n(0)}{n}$.

□

Definición 2.0.3. Sea F un levantamiento de $f \in Hom_+(S^1)$. Definimos el *número de traslación del levantamiento* F como $\rho(F) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}$.

Observación:

1. Si F_1 es otro levantamiento de f, entonces $F_1(x) = F(x) + k$, para algún $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \rho(F_1) = \rho(F) + k$.

2. $\rho(F^m) = m\rho(F)$.

Definición 2.0.4. Sea $f \in Hom_+(S^1)$. Llamamos *número de rotación* de f a $\rho(f) = \rho(F) \pmod 1$, donde F es un levantamiento de f.

Proposición 2.0.2. *El número de rotación es invariante por conjugaciones. Es decir, si $f, g \in Hom_+(S^1)$, donde $g = h^{-1} \circ f \circ h$, para cierta $h \in Hom(S^1)$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

Demostración. Sea F levantamiento de f y H levantamiento de h. Luego, H^{-1} es un levantamiento de h^{-1} y $G = H^{-1} \circ F \circ H$ es un levantamiento de g. Ahora, existe M tal que $|H^{-1}(y) - y| < M$, $\forall\ y \in \mathbb{R} \Longrightarrow |G^n(x) - F^n(H(x))| \leq M$, $\forall\ n \Longrightarrow \rho(G) = \lim\limits_n \frac{G^n(x)}{n} = \lim\limits_n \frac{H^{-1}(F^n(H(x))) - F^n(H(x))}{n} + \frac{F^n(H(x))}{n} = \lim\limits_n \frac{F^n(H(x))}{n} = \rho(F) \Longrightarrow \rho(g) = \rho(f)$. □

Observación 2.0.4. $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

2.1. Número de rotación racional

Proposición 2.1.1. *Sea $f \in Hom(S^1)$. Entonces*

$$\rho(f) \in \mathbb{Q}(mod 1) \Longleftrightarrow f \textit{ tiene puntos periódicos.}$$

En este caso, si $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$*, con* $(p,q) = 1$*, todos los puntos periódicos tienen período* q*.*

Demostración. Veamos primero el reciproco. Sea F levantamiento de f. Como f tiene un punto periodico $\pi(x)$ (digamos de período q) entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Luego, $F^{nq}(x) = x + np$ y por lo tanto

$$\lim_n \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_n \frac{x+np}{nq} = p/q$$

y por lo tanto $\rho(f) = \frac{p}{q}(mod 1)$.

Veamos el directo:
Por propiedad del número de rotación:

$$\rho(f^m) = m\rho(f) \text{ (mod 1)}.$$

Si $\rho(f) = \dfrac{p}{q} \Longrightarrow \rho(f^q) = 0$. Basta demostrar que si $\rho(f) = 0$, entonces f tiene puntos fijos. Sea F tal que $\rho(F) = 0$. Si F no tiene puntos fijos, como $F - Id$ es periódica, $\exists\ \delta$ tal que $|F(x) - x| \geq \delta$. Por otra parte $F(x) > x, \forall\ x$ (*) o $F(x) < x, \forall\ x$ (**). Supongamos (*) (el otro caso es análogo). Entonces $F(0) > \delta$, $F^2(0) > F(0) + \delta > 2\delta, \ldots F^n(0) > n\delta$. Entonces $\delta < \dfrac{F^n(0)}{n} \longrightarrow 0$.

Finalmente supongamos que $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ y veamos que todos los puntos periódicos tiene periódo q. Sea F un levantamiento de f tal que $\rho(F) = \dfrac{p}{q}$ y sea $\pi(x)$ periódico por f. Entonces, existen r, s tales que $F^r(x) = x+s$. Ahora

$$\rho(f) = \frac{p}{q} = \lim_{r\to\infty} \frac{F^{rs}(x)}{rs} = \frac{s}{r},$$

entonces $s = mp$ y $r = mq$ para algún m. Supongamos $F^q(x) - p > x$, entonces

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x.$$

Entonces $x < F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s$, lo cual es absurdo. Análogamente si $F^q(x) - p < x$ llegamos a una contradicción. Así, $\pi(x)$ es periódico por f si y sólo si $F^q(x) = x + p$. Luego todos los puntos periódicos de f tienen período q. □

Observación 2.1.1. Veamos otra forma para la demostración anterior. Sea $\pi(x)$ periódico de f de período q. Entonces $S^1 \backslash \mathcal{O}(\pi(x)) = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ son q intervalos disjuntos que son permutados por f, y $f^j(I_i) = I_i$ si y sólo si $j = q$. Luego

$f^q(I_1) = I_1$ es un homeo del intervalo I_1. Si $\pi(y)$ es un punto periódico de f, tenemos que $\mathcal{O}(\pi(y)) \cap I_1 \neq \emptyset$. Supongamos que $\pi(y) \in I_1$. Ahora

$$\Omega(f^q|_{I_1}) = \{\text{puntos fijos}\} \Longrightarrow f^q(\pi(y)) = \pi(y).$$

Luego $\pi(y)$ es periódico de período q.

Corolario 2.1.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Entonces $\Omega(f) = Per(f)$.*

Proposición 2.1.2. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$ y sea $\pi(x)$ un punto periódico de f. Entonces el orden de $\{\pi(x), f(\pi(x)), \ldots, f^{q-1}(\pi(x))\}$ en S^1 es el mismo que una órbita según $R_{\frac{p}{q}}$, i.e., es el mismo que*

$$\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}.$$

Demostración. Sea F un levantamiento de f tal que $F^q(x) = x + p$. Consideremos $\pi^{-1}(\mathcal{O}(\pi(x))) = A$. Entonces A divide a $[x, x+p]$ en $p.q$ intervalos. Por otra parte $x < F(x) < \ldots < F^{q-1}(x) < F^q(x) = x + p$. Tenemos entonces q intervalos en $[x, x+p]$:

$$[x, F(x)], [F(x), F^2(x)], \ldots, [F^{q-1}(x), F^q(x)].$$

De ahí que como A es invariante por F, tenemos que $\#A \cap [x, F(x)] = p + 1$. Sea $x_1 \in A$ tal que $[x, x_1) \cap A = \emptyset$. Entonces existe un único k con $0 \leq k < q$ tal que $F^k(x) - r = x_1$ y $r \in \mathbb{Z}$. Sea F_1 definida como $F_1(z) = F^k(z) - r$. Entonces $F_1^p(x) = F(x)$. Luego

$$f^{kp}(\pi(x)) = f(\pi(x)) \Longrightarrow kp \equiv 1 \text{ (mod q)}.$$

Entonces k es el único entero con $0 < k < q$ que verifica $kp \equiv 1$ (mod q) y $f^{kp}(\pi(x))$ es el que le sigue a $\pi(x)$ en la orientación de S^1, es decir el orden de $\{\pi(x), f(\pi(x)), \ldots, f^{q-1}(\pi(x))\}$ en S^1 es:

$$\pi(x) < f^k(\pi(x)) < f^{2k}(\pi(x)) < \ldots < f^{(q-1)k}(\pi(x)).$$

Vimos que el orden está determinado solamente por $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$. Así, es el mismo que $R_{\frac{p}{q}}$. □

2.2. Número de rotación irracional

Teorema 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}(mod1)$. Entonces $\Omega(f)$ es minimal.*

Demostración. Sea $M \subset \Omega(f)$ compacto invariante, $M \neq \emptyset$. Entonces $S^1 \backslash M$ es abierto. Sea $I = (a, b)$ una componente conexa de $S^1 \backslash M$. Luego $f^n(I) \cap I = \emptyset$, $\forall\, n > 0$ (de lo contrario f tiene puntos periódicos). Entonces $I \subset S^1 \backslash \Omega(f)$. De ahí $\Omega(f) \subset M$. Entonces $\Omega(f)$ es minimal. □

Corolario 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces $\Omega(f) = S^1$ o $\Omega(f)$ es perfecto con interior vacío (i.e., $\Omega(f)$ es un conjunto de Cantor).*

Demostración. $\Omega(f)$ es perfecto pues $\Omega(f)$ es minimal. Si $\Omega(f)$ tiene interior no vacío, tenemos que $\Omega(f)$ es abierto. Como $\Omega(f)$ es cerrado, $\Omega(f) = S^1$. □

Proposición 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Sea F levantamiento tal que $\rho(F) = \alpha$. Entonces para todo $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$ se cumple*

$$(1)\ n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2 \Longleftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2\ (2).$$

Demostración. Fijemos $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$. Como $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$, el signo de $p(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) + m_2$ no depende de x. Luego, dados $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$, si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para algún x tenemos que la misma desigualdad vale para todo x. Supongamos que (2) se cumple, entonces vale para $x = 0$, i.e. $F^{n_1}(0) - F^{n_2}(0) < m_2 - m_1$. Haciendo $y = F^{n_2}(0)$ tenemos $F^{n_1 - n_2}(y) - y < m_2 - m_1$ (3). Luego (3) vale para todo y, en particular para $y = 0$. Entonces $F^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1$, de ahí que $F^{k(n_1 - n_2)}(0) < m_2 - m_1$, entonces

$$\frac{F^{k(n_1-n_2)}(0)}{k(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2},$$

pudiendo suponer que $n_1 - n_2 > 0$. Haciendo tender k a $+\infty$ obtenemos

$$\alpha \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, tenemos

$$\alpha < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

De donde

$$n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2.$$

Análogamente si

$$F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$$

tenemos

$$n_1\alpha + m_1 > n_2\alpha + m_2,$$

y se concluye la demostración. $\square$

Definición 2.2.1. Dados $f, g \in Hom_+(S^1)$ decimos que f es *semiconjugado* a g si existe $h : S^1 \to S^1$ continua y sobre (de grado 1 y preservando orientación) tal que $h \circ f = g \circ h$.

Teorema 2.2.2. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es semiconjugado a R_α (por una h que preserva orientación). Mas aún si f es transitivo, f es conjugado a R_α (i.e. h es un homeo).*

Demostración. Sea F un levantamiento de f y $x \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto $B = \{F^n(x) + m : \ n, m \in \ \mathbb{Z}\}$. Definimos una función $H : B \to \mathbb{R}$ por $H(F^n(x) + m) = n\alpha + m$. Luego H es monótona y $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$. Entonces existe una única extensión continua de H a $\overline{B}$ y monótona y además $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$. Entonces hay una única extensión de H a $\mathbb{R}$ de forma monótona. Luego tenemos $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y sobre. Se verifica $H \circ F = T_\alpha \circ H$. Además $H(x + 1) = H(x) + 1$. Luego definimos $h : S^1 \to S^1$ por $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$. h es continua, sobre y $h \circ f = R_\alpha \circ h$. Por otra parte, si f es transitivo (i.e. $\Omega(f) = S^1$) tenemos que $\overline{B} = \mathbb{R}$ y H es un homeo. $\square$

2.3. Difeomorfismos del círculo

Definición 2.3.1. Sea $f : S^1 \to S^1$, $J \subset S^1$. Decimos que J es un *intervalo errante* si

a) $J,\ f(J),\ f^2(J), \ldots$ son disjuntos dos a dos.

b) $\omega(J) = \bigcup_{x \in J} \omega(x)$ no es una única órbita periódica.

Ejemplo 1. Sea $f : S^1 \to S^1$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $\Omega(f) \subsetneq S^1$. Una componente de $S^1 \backslash \Omega(f)$ es un intervalo errante.

Lema 2.3.1 (Distorsión limitada)**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Entonces existe C tal que*

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp\left(C\sum_{i=0}^{n-1}|f^i(x)-f^i(y)|\right).$$

Demostración. Sea m tal que $|f'(x)| \geq m > 0$ y M tal que $|f''(x)| \leq M$. Entonces $C = \dfrac{M}{m}$ es constante de Lipschitz de la función $x \longmapsto \log|f'(x)|$. Luego

$$\log\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} = \log\frac{\prod_{i=0}^{n-1}|f'(f^i(x))|}{\prod_{i=0}^{n-1}|f'(f^i(y))|} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\log|f'(f^i(x))| - \log|f'(f^i(y))| \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}C|f^i(x)-f^i(y)| = C\sum_{i=0}^{n-1}|f^i(x)-f^i(y)|.$$

□

Lema 2.3.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Sea $J \subset S^1$ intervalo tal que $\sum_{n\geq 0}|f^n(J)| < \infty$. Entonces existe $T \supsetneq J$ tal que $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|,\ \forall\, n \geq 0$.*

Demostración. Sea $K = \sum_{n\geq 0}|f^n(J)|$ y C del lema de Distorsión limitada. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta e^{2KC} < 1$. Consideremos $T \supsetneq J$ tal que $|T| \leq (1+\delta)|J|$. Probemos el teorema por inducción. El caso $n = 0$ es cierto. Si $i = 0, \ldots, n-1$, sean $x, y\ \in T$. Entonces,

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq e^{C\sum_{j=0}^{n-1}|f^j(T)|} \leq e^{2KC}.$$

Luego

$$|f^n(T)| = |f^n(J)| + |f^n(T\backslash J)|$$

y

$$|f^n(T\backslash J)| \underset{\text{para algún } x\in T}{\leq} |(f^n)'(x)||T\backslash J| =$$

$$= \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\frac{|f^n(J)|}{|J|}|T\backslash J| \leq$$

$$\leq \frac{|f^n(J)|}{|J|}e^{2KC}|T\backslash J| \leq$$

$$\delta e^{2KC}|f^n(J)| < |f^n(J)|.$$

Entonces

$$|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|.$$

En particular se cumple también $|f^n(T)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ $\square$

Teorema 2.3.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Entonces f no tiene intervalos errantes.*

Demostración. Supongamos, razonando por contradicción que f tiene un intervalo errante J_0. Se deduce que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Sea $J \supset J_0$ intervalo errante maximal. Se deduce que J es una componente de $S^1 \backslash \Omega(f)$. Además $\sum_{n\geq 0} |f^n(J)| \leq 1$ con los $f^n(J)$ disjuntos dos a dos. Por el lema anterior, existe $T \supsetneq J$ tal que $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|$ y $|f^n(T)| \longrightarrow 0$ (observar que podemos suponer $T \neq S^1$). Sea $x \in \partial J$ tal que $x \in T$. Como $x \in \Omega(f)$ existe $n_i \to \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \to x$ (y $f^{n_i} \in T$). Como $|f^n(J)| \to 0$ podemos tomar un elemento, llamémosle k, de la sucesión n_i con i suficientemente grande tal que $dist(f^k(J), S^1\backslash T) < \frac{|f^k(J)|}{4}$. Concluimos de aquí que $f^k(T) \subset T$ y por lo tanto f^k tiene un punto periódico. Esto contradice que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

Corolario 2.3.1 (Denjoy, [D])**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2, con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es conjugado a R_α.*

Demostración. Por el teorema anterior, $\Omega(f) = S^1$. $\square$

Nota: El resultado original de Denjoy tiene hipótesis mas débiles (que $x \to \log|f'(x)|$ sea de variación limitada, cosa que efectivamente sucede si f es de clase C^2). La demostración que vimos es debida a Schwarz [Sch].

Teorema 2.3.2 (Denjoy, [D])**.** *Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces existe $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^1 con $\rho(f) = \alpha$ y f tiene un intervalo errante (i.e. f no es conjugado a R_α).*

Demostración. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\,\mathbb{Z}}$ tal que $\lambda_n > 0 \ \ \forall\, n \in\ \mathbb{Z}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n = 1$ y $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \longrightarrow 1$. $\left(\text{Ej: } \lambda_n = \dfrac{K}{(|n|+1)(|n|+2)}\right)$.
Colocamos en S^1 intervalos I_n, $|I_n| = \lambda_n$ y los ordenamos en S^1 de la misma forma que $\{x_n = R_\alpha^n(0) :\ n \in \mathbb{Z}\}$ (por inducción, colocamos I_0, I_1 tal que

$\mathrm{dist}(I_0, I_1) = \sum\limits_{\{k: x_k \in (x_0,x_1)\}} \lambda_k$, etc.). Vamos a definir $f : S^1 \to S^1$ definiendo f' e integrando (si $g : S^1 \to S^1$ es continua y $\int_{S^1} g = 1$ entonces $\exists\, f : S^1 \to S^1$ tal que $f' = g$). En $I_n = (a_n, b_n)$ definimos

$$f'(x) = g(x) = 1 + k_n \frac{(a_n - x)(x - b_n)}{\lambda_n^2},$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n,$$

donde

$$k_n = \frac{6}{\lambda_n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Entonces

$$\int_{I_n} g(x) = \int_{a_n}^{b_n} g(x) = \lambda_n + \frac{k_n}{\lambda_n^2}\frac{\lambda_n^3}{6} = \lambda_{n+1},$$

entonces

$$\int_{S^1} g(x) = 1.$$

Definimos $f : S^1 \to S^1$ por

$$f(x) = \int_{a_0}^{x} g(x)dx + a_1$$

Verifiquemos que $f(I_n) = I_{n+1}$.

$$f(a_n) = \int_{a_0}^{a_n} g(x)dx + a_1 = \sum_{k:\ I_k \subset (a_0,a_n)} \int_{I_k} g(x)dx + a_1 =$$

$$= \sum_{k:\ x_k \in\ (x_0,x_n)} |I_{k+1}| + a_1 = \sum_{k:\ x_k \in (x_1,x_n)} |I_k| + a_1 = a_n.$$

Verifiquemos que $\rho(f) = \alpha$. Sea $h : \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n \to S^1$ por $h(I_n) = R_\alpha^n(0) = x_n$. h preserva orientación y tiene dominio y rango denso en S^1, entonces h se extiende continuamente a $h : S^1 \to S^1$ continua y sobre. Además $h \circ f = R_\alpha \circ h$, es decir f es semiconjugado a R_α. Entonces $\rho(f) = \alpha$ (ver ejercicio 8). $\square$

2.4. $Diff^r(S^1)$ desde el punto de vista genérico

En esta sección estudiaremos $Diff^r(S^1)$: el conjuntos de difeomorfismos del círculo de clase C^r con la topología C^r.

Veremos primero que el tener número de rotación irracional es “inestable”.

Teorema 2.4.1 (C^r- closing lemma)**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^r y $x \in \Omega(f)$. Entonces existe g, C^r arbitrariamente cerca de f tal que $x \in Per(g)$.*

Demostración. Vamos a mostrar que $g_t = R_t \circ f$ para algún t arbitrariamente pequeño tiene a x como punto periódico. Es fácil ver que g_t está C^r cerca de f si t es pequeño. Si x es periódico de f no hay nada que probar. Supongamos que no lo es. Entonces $x \in \omega(x) \Longrightarrow \exists\, n_i$ tal que $f^{n_i}(x) \longrightarrow x$. Sea F levantamiento de f y $\hat{x}$ tal que $\pi(\hat{x}) = x$. Entonces $\exists\, p_i$ tal que $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i \longrightarrow \hat{x}$. Tomando subsucesión podemos suponer que $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i$ es monótona. Supongamos que es creciente. Sea $\alpha > 0$ y consideremos $g_\alpha = R_\alpha \circ f$. $G_\alpha = T_\alpha \circ F$ levantamiento de g_α.

Afirmación 1. $G_\alpha^n(x) \geq F^n(x) + \alpha\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En efecto, razonando por inducción, $G_\alpha^n(x) = G_\alpha(G_\alpha^{n-1}(x)) \geq G_\alpha(F^{n-1}(x)) \geq F^n(x) + \alpha$.

Ahora tomemos n_i tal que $\hat{x} - (F^{n_i}(\hat{x}) - p_i) < \alpha$. Entonces

$$G_0^{n_i}(\hat{x}) - p_i = F^{n_i}(\hat{x}) - p_i < \hat{x}$$

y

$$G_\alpha^{n_i}(\hat{x}) - p_i \geq F^{n_i}(\hat{x}) - p_i + \alpha > \hat{x}.$$

Entonces existe $t \in [0, \alpha]$ tal que $G_t^{n_i}(\hat{x}) - p_i = \hat{x}$. □

Definición 2.4.1. Sea $f : S^1 \to S^1$ y p un punto fijo de f. Decimos que p es hiperbólico si $|f'(p)| \neq 1$. Si p es periódico, $f^k(p) = p$, decimos que p es un punto periódico hiperbólico si $|(f^k)'(p)| \neq 1$, i.e., p es un punto fijo hiperbólico de f^k.

Teorema 2.4.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ y p un punto fijo (periódico) hiperbólico de f. Entonces existe $U(p)$ entorno de p y $\mathcal{U}(f)$ entorno de f en la topología C^r tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces g tiene un único punto fijo (periódico) hiperbólico en $U(p)$.*

Demostración. Tenemos que $|f'(p)| \neq 1$. Supongamos que $f'(p) > 1 \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > \mu > 1$, si $|x - p| \leq \varepsilon$. Luego, $\begin{cases} f(p+\varepsilon) > (p+\varepsilon) + \mu\varepsilon \\ f(p-\varepsilon) < (p-\varepsilon) - \mu\varepsilon \end{cases}$. Si $\|f - g\|_r < \delta$ con δ suficientemente chico, entonces $g(p+\varepsilon) > p+\varepsilon$, $g(p-\varepsilon) < p-\varepsilon$, y $g'(x) > 1\ \forall\, x \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$. Luego, $\exists\, !\ p_g \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ tal que $g(p_g) = p_g$. Además, $|g'(p_g)| \neq 1$.

Otra forma:
Sea $F : Diff^r(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(g, x) = g(x) - x$. Entonces tenemos que $F(p, 0) = 0$ y $\partial_2 F|_{(f,p)} = f'(p) - 1 \neq 0$. Luego, por el teorema de la Función Implícita, existen $U(p)$,$\mathcal{U}(f)$ y $\varphi : \mathcal{U}(f) \to U(p)$ de clase C^r tales que $F(g, \varphi(g)) = 0$. □

Proposición 2.4.1. *Sea $g \in Diff^r(S^1)$ y $p \in Per(g)$. Entonces, existe g_1 C^r-cerca de g tal que p es un punto (periódico) hiperbólico de g_1.*

Demostración. Si p es hiperbólico de g, no hay nada que probar. Luego, sea α, $0 < \alpha < 1$ arbitrariamente chico tal que si definimos $\varphi : S^1 \to S^1$ verifica:

1. $\varphi(x) = 0$ si $x \notin U(p)$
2. $\varphi(p) = 0$
3. $\varphi'(p) = \alpha$
4. $|\varphi'(p)| \leq \alpha$

Entonces, esta φ está C^r-cerca de la función nula. Sea $g_1 = g + \varphi$. Luego, g_1 está C^r-cerca de g, y cumple $g_1(p) = g(p) + \varphi(p) = p$ y ${g_1}'(p) = g'(p) + \alpha \neq 1$. □

Teorema 2.4.3. *Sea $g_1 \in Diff^r(S^1)$ tal que g_1 tiene un punto hiperbólico p. Entonces, existe g_2 C^r-cerca de g_1 tal que g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos.*

Demostración. Observemos primero que cualquier g_2 cerca de g_1 tiene un punto periódico hiperbólico de período igual al período de p según g_1 (llamémoslo k). Luego, sabemos que todos los puntos periódicos de g_2 tienen período k.
Sea G_1 levantamiento de g_1 y consideremos la función $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $H(x, t) = [T_t \circ G_1]^k(x) - r$, donde ${G_1}^k(p) = p + r$. Luego, $H(p, 0) = 0$ y $\partial_t H \neq 0$ (ya que $G' > 0$) y entonces $S = H^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$. Consideremos $\pi_2 : S \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la segunda componente y sea t_0 valor regular (arbitrariamente cerca de 0) de $\pi_2|_S$. Tomemos $G_2(x) = T_{t_0} \circ G_1(x)$. Afirmamos que si ${G_2}^k(x_0) = r + x_0 \Longrightarrow {G_2}'(x_0) \neq 1$. En este caso, tenemos que $H(x_0, t_0) = 0$. Como $Ker(dH_{(x_0,t_0)}) = T_{(x_0,t_0)}S$ y t_0 es un valor regular, entonces $\partial_x H(x, t)|_{(x_0,t_0)} \neq 0$ pero $\partial_x H(x, t)|_{(x_0,t_0)} = ({G_2}^k)'(x_0) - 1$. Sea $g_2 = \pi \circ G_2$. Luego, g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos y esta arbitrariamente C^r cerca de g_1 (tomando t_0 arbitrariamente chico). □

Corolario 2.4.1. *Existe $\mathcal{D} \subset Diff^r(S^1)$ (abierto y denso) tal que si $g \in \mathcal{D}$ entonces:*

1. *$\rho(g) \in \mathbb{Q}$*
2. *Todo punto periódico de g es hiperbólico.*

Demostración. abierto:
Sea g tal que $\rho(g) \in \mathbb{Q}$ y todo punto periódico de g es hiperbólico. Entonces g tiene una cantidad finita de órbitas periódicas $\mathcal{O}(p_1), \ldots, \mathcal{O}(p_k)$ que, por comodidad, supondremos puntos fijos. Para cada i, $\exists\ U_i(p_i)$ y $\mathcal{U}_i(g)$ tal que si $\widetilde{g} \in \mathcal{U}_i(g) \Longrightarrow \widetilde{g}$ tiene un (único) punto fijo en U_i y es hiperbólico. Podemos suponer que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por otra parte, existe $d > 0$ tal que si $x \notin \bigcup_i U_i \Longrightarrow d(x, g(x)) > d \Longrightarrow \exists\ \widetilde{\mathcal{U}}(g)$ tal que si $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{U}}(g) \Longrightarrow d(x, \widetilde{g}) > \frac{d}{2}$, $\forall\ x \notin \bigcup_i U_i$. Sea $\mathcal{U}(g) \subset \mathcal{U}_1(g) \cap \ldots \cap \mathcal{U}_k(g) \cap \widetilde{\mathcal{U}}(g)$. Luego, si $\widetilde{g} \in \mathcal{U}(g) \Longrightarrow \rho(\widetilde{g}) \in \mathbb{Q}$ y todos los puntos fijos (periódicos) de $\widetilde{g}$ son hiperbólicos.

Densidad:
Sea $f \in Diff^r(S^1)$. Entonces, por el C^r-closing lemma obtenemos una g tal que $\rho(g) \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists\ g_1$ tal que $\rho(g_1) \in \mathbb{Q}$ y g_1 tiene un punto periódico hiperbólico. Por Teorema 2.4.3, $\exists\ g_2$ tal que $\rho(g_2) \in \mathbb{Q}$ y g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos. En cada paso, la perturbación es arbitrariamente pequeña. $\square$

Definición 2.4.2. $f \in Diff^r(S^1)$ es llamado *Morse - Smale* si:

1. $\Omega(f) = Per(f)$
2. $\#Per(f) < \infty$
3. Todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos.

Corolario 2.4.2. *El conjunto de los difeos Morse-Smale en $Diff^r(S^1)$ es abierto y denso.*

Definición 2.4.3. Decimos que un difeo $f : S^1 \to S^1$ de clase C^r es C^r-*estructuralmente estable* si $\exists\ \mathcal{U}(f) \subset Diff^r(S^1)$ tal que toda $g \in \mathcal{U}(f)$ es conjugada a f.

Teorema 2.4.4. *Si $f : S^1 \to S^1$ es un difeo C^r Morse-Smale, entonces f es C^r-estructuralmente estable.*

Demostración. Por comodidad supondremos que $\rho(f) = 0$, i.e., f tiene puntos fijos $p_1, \ldots, p_k$. Luego, $\exists\ \mathcal{U}(f)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f) \implies g$ tiene puntos fijos $p_1(g), \ldots, p_k(g)$ y $p_i(g) \underset{g \to f}{\longrightarrow} p_i$. Ahora, $S^1 \backslash \{p_1, \ldots, p_k\} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$ y $f(I_i) = I_i$, y también $S^1 \backslash \{p_1(g), \ldots, p_k(g)\} = I_1(g) \cup \ldots \cup I_k(g)$, con $g(I_i(g)) = I_i(g)$. Conjugamos $f|_{I_1}$ con $f|_{I_i(g)}$, $i = 1, \ldots, k$ y se extiende esta conjugación a $p_1, \ldots, p_k$, obteniendo una conjugación ente f y g. □

2.5. Ejercicios

1. Demostrar el Teorema de Hopf: sean $f : S^1 \to S^1$, $g : S^1 \to S^1$ dos funciones continuas del círculo, entonces f y g son homotópicas sii $deg(f) = deg(g)$.

2. Sean $f : S^1 \to S^1$, $g : S^1 \to S^1$ dos funciones continuas del círculo. Mostrar que $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$.

3. Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua del círculo. Definimos $P_n(f) = \{p : \exists\ 0 < k \leq n \ / \ f^k(p) = p\}$. Mostrar que $\sharp P_n(f) \geq |deg(f)^n - 1|$.

4. Sean $f : S^1 \to S^1$, $g : S^1 \to S^1$ dos homeomorfismos preservando orientación que conmutan. Probar que $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)(mod 1)$. Concluir que $\rho(f^n) = \rho(f)^n (mod 1)$.

5. Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo del círculo que revierte orientación ($deg(f) = -1$).

   a) Mostrar que f tiene exactamente dos puntos fijos

   b) Concluir que para cualquier x, $\omega(x)$ es un punto fijo o un punto periódico de período 2.

6. Sea $\rho : Hom_+(S^1) \to S^1$ la función que asocia a cada homeomorfismo creciente del círculo su número de rotación. Probar que ρ es una función continua. Sug: Mostrar que siempre se cumple que

$$\left| \frac{f^{mn}(0)}{mn} - \frac{f^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

7. Sea $f : S^1 \to S^1$ conjugado a una rotación irracional. Probar que la conjugación es única a menos de una rotación, es decir, si h_1, h_2 son dos conjugaciones, entonces $h_1 = R_\beta \circ h_2$ para algún β.

8. Sean $f, g \in Hom_+(S^1)$ que son semiconjugados por h con $deg(h) = 1$. Probar que $\rho(f) = \rho(g)$.

9. Sea C el conjunto de Cantor usual en $[0, 1]$ y α un número irracional, $0 < \alpha < 1$. Encontrar $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ y $\Omega(f) = C$. Sug: usar la función de Cantor y también usar (o demostrar?) que dados dos conjuntos numerables y densos A, B en $[0, 1]$ entonces existe $h : [0, 1] \to [0, 1]$ homeomorfismo creciente tal que $h(A) = B$.

10. Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con número de rotación irracional. Probar que f es conjugado a la rotación irracional sii $\Omega(f)$ es estable según Lyapunov.

11. Probar que no hay homeomorfismos expansivos en S^1. (Sug: discutir según número de rotación).

12. Probar que si $f \in Diff^r(S^1)$ es estructuralmente estable entonces f es Morse-Smale.

Capítulo 3

Estabilidad local y flujos en $\mathbb{R}^2$

En este capítulo consideraremos campos $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definidos en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y la correspondiente ecuación $\dot{x} = X(x)$. El campo será siempre de clase C^1 y supondremos que define un flujo ϕ_t en Ω que es de clase C^1 también (en particular supondremos que las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$).

3.1. Estabilidad de singularidades

Definición 3.1.1. Sea X un campo en Ω. Un punto $x_0 \in \Omega$ es una singularidad (o punto de equilibrio) si $X(x_0) = 0$. Si $X(q) \neq 0$ diremos que q es regular.

Observemos que en ese caso si ϕ_t es el flujo asociado entonces $\phi_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1.2. Sea x_0 una singularidad del campo X. Decimos que x_0 es *estable* (según Lyapunov) si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $\|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Si además se cumple que existe δ_0 tal que si $\|x - x_0\| < \delta_0$ entonces

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = x_0$$

diremos que x_0 es *asintóticamente estable*.

Daremos a continuación condiciones suficientes debidas a Lyapunov para garantizar que un punto de equilibrio es estable. Por simplicidad, supodremos siempre que el punto de equilibrio es $x_0 = 0$.

Sea $V : U \to \mathbb{R}$ una función definida en U entorno de una singularidad. Definimos, en caso de que exista,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))_{|t=0}.$$

Observar que si V es de clase C^1 entonces $\dot{V}$ existe y además no es necesario conocer el flujo ϕ_t para conocer $\dot{V}$ ya que en ese caso

$$\dot{V}(x) = < gradV(x), X(x) > .$$

Definición 3.1.3. Una función $V : U \to \mathbb{R}$ donde U esta definida en un entorno U de la singularidad $x_0 = 0$ es una función de Lyapunov si

1. V es continua
2. Existe $\dot{V}(x)$ para todo $x \in U$.

Ejemplo: Consideremos la siguiente ecuación en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x^2 \\ \dot{y} & = & x + y - y^3 \end{array}$$

Y sea $V(x, y) = x^2 + y^2$. Entonces

$$\dot{V}(x, y) = < (2x, 2y), (-y + x^2, x + y - y^3) > = 2x^3 + 2y^2 - 2y^4.$$

Teorema 3.1.1. *Sea X un campo con $X(0) = 0$. Si existe una funcion de Lyapunov $V : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de la singularidad $x_0 = 0$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ $\forall x \neq 0$ y $\dot{V}(x) \leq 0$ entonces el punto de equilibrio 0 es estable*

Demostración. Consideremos $\epsilon > 0$ y supondremos sin perdida de generalidad que $\overline{B}(0, \epsilon) \subset U$. Sea $m = min\{V(x) : \|x\| = \epsilon\}$ que existe pues V es continua y $\partial\overline{B}$ es compacto. Además $m > 0$. Por otro lado como $V(0) = 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $V(x) < m$. Sea entonces x, $\|x\| < \delta$ y probemos que $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$ para cualquier $t \geq 0$. Razonando por contradicción supongamos que para algún $t > 0$ se tiene que $\phi_t(x) \geq \epsilon$. Sea $t_0 = \mathrm{mín}\{s \in [0, t], \phi_s(x) \geq \epsilon\}$. Tenemos entonces que $V(\phi_{t_0}(x) \geq m$. Por otro lado

$$V(\phi_{t_0}(x)) - V(x) = \int_0^{t_0} \dot{V}(\phi_s(x)) ds \leq 0$$

y por lo tanto $V(\phi_{t_0}(x) \leq V(x) < m$ lo que es una contradicción.

□

Ejemplos:

1. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\sin(x) \end{array}$$

   Si tomamos $V(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x)$ en un entorno de $(0,0)$ tenemos que $V > 0$ y $V(0,0) = 0$. Además

$$\dot{V}(x,y) =< (\sin(x), y), (y, -\sin(x) >= 0$$

   y por lo tanto $(0,0)$ es estable.

2.

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2yx - x^3 \\ \dot{y} & = & -x^2 \end{array}$$

   Si tomamos $V(x,y) = x^2 + 2y^2$ entonces

$$\dot{V}(x,y) =< (2x, 4y), (2yx - x^3, -x^2) >= -2x^4$$

   y por lo tanto $(0,0)$ es estable.

Teorema 3.1.2. *Sea X un campo con $X(0) = 0$. Si existe una funcion de Lyapunov $V : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de la singularidad $x_0 = 0$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \; \forall x \neq 0$ y $\dot{V}(x) < 0 \; \forall x \neq 0$ entonces el punto de equilibrio 0 es asintoticamente estable*

Demostración. Ya sabemos por el teorema anterior que 0 es estable. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$. Probemos que si $\|x\| < \delta$ entonces $\phi_t(x) \to 0$. Sabemos que $V(x) > 0$ y por la hipotesis concluimos que $V(\phi_t(x))$ es estricamente decreciente. Luego existe $\lim_{t\to\infty} V(\phi_t(x)) = a \geq 0$. Sea $y \in \omega(x) \subset \overline{B}(x, \epsilon)$ (esto último por ser estable). Luego $V(\phi_t(y)) = \lim_k V(\phi_{t+t_k}(x)) = a$ y por lo tanto V es constante a lo largo de la trayectoria de y y la única posibilidad es que $a = 0$ y por lo tanto $y = 0$. □

Ejemplo: Consideremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{aligned}$$

Si tomamos $V(x,y) = x^2 + y^2$ entonces

$$\dot{V}(x,y) = <(2x,2y),(-y-x^3, x-y^3)> = -2x^4 - 2y^4$$

y por lo tanto $(0,0)$ es asintoticamente estable.

La condición del teorema 3.1.2 en realidad es necesaria, como dice el teorema que sigue que enunciaremos sin demostración,

Teorema 3.1.3 (Massera). *Sea $\dot{x} = f(x)$ un campo C^1 y x_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable. Entonces existe una función $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $V(x) \geq 0$ y $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ con $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq x_0$.*

3.2. Campos lineales y aproximación lineal

Consideremos $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y el campo asociado $\dot{x} = Ax$ No entraremos en detalle del estudio de las soluciones de un campo lineal. Sin embargo comenzaremos viendo que el flujo de $\dot{x} = Ax$ es lineal:

Proposición 3.2.1. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y sea ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$. Entonces ϕ_t es lineal*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Y considermos $\psi(t) = a\phi_t(x) + b\phi_t(y)$. Luego

$$\dot{\psi}(t) = a\dot{\phi}_t(x) + b\dot{\phi}_t(y) = aA\phi_t(x) + bA\phi_t(y) = A(a\phi_t(x) + b\phi_t(y)) = A\psi(t)$$

y por lo tanto $\psi(t)$ es solución. Ademas $\psi(0) = ax + by$ Luego $\psi(t) = \phi_t(ax + by)$ □

Observación 3.2.1. Si ϕ_t es el flujo de $\dot{x} = Ax$ entonces $\psi_t = \phi_{-t}$ es el flujo de $\dot{x} = -Ax$.

Estudiaremos la estabilidad del origen como punto de equilibrio de $\dot{x} = Ax$. Demostraremos que si los valores propios de A tienen parte real negativa entonces 0 es asintoticamente estable. Para ello buscaremos una funcion de Lyapunov adecuada.

Sea M una matriz simétria y consideremos la forma cuadrática $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) =< Mx, x >$. Veremos quien es $\dot{V}$ respecto del campo Ax.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= < M\dot{x}, x > + < Mx, \dot{x} >=< MAx, x > + < Mx, Ax >\\ &= < MAx, x > + < A^t Mx, x >\\ &= < (MA + A^t M)x, x >= 2 < Mx, Ax >= 2 < MAx, x >\end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{S}$ es el espacio de las matrices simétrica $n \times n$.

Lema 3.2.1. *Sea A una matriz invertible tal que todos sus valores propios tienen parte real negativa. Entonces, la transformación lineal $L_A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definida como*

$$L_A(M) = MA + A^t M$$

es un isomorfismo.

Demostración. Basta demostrar que $Ker(L_A) = \{0\}$. Sea M tal que $MA + A^t M = 0$. Luego $MA = -A^t M$. Observemos que si v es un vector propio con valor propio asociado λ se tiene que $\lambda Mv = MAv = -A^t Mv$ y por lo tanto $A^t Mv = -\lambda Mv$. Si $Mv \neq 0$ entonces Mv es vector propio de A^t con valor propio $-\lambda$. Como los valores propios de A y A^t son iguales llegamos a un absurdo pues en este caso $-\lambda$ tendria parte real positiva. Por lo tanto $Mv = 0$. Utilizaremos esta idea para mostrar que $M = 0$.

Como $MA = -A^t M$ concluimos que $MA^k = (-1)^k (A^t)^k M$ y por lo tanto

$$M(A - \lambda I)^k = (-1)^k (A^t + \lambda I)^k M.$$

Sea $\mathcal{B}$ una base de jordan de A y sea $v \in \mathcal{B}$. Resulta que existe una valor propio λ de A y $k \geq 1$ tal que $(A - \lambda I)^k v = 0$. Luego

$$0 = M(A - \lambda I)^k v = (-1)^k (A^t + \lambda I)^k Mv.$$

Si fuera $Mv \neq 0$ concluiríamos que $-\lambda$ sería valor propio de A^t (y por lo tanto de A) con parte real positiva lo que es absurdo. Luego $Mv = 0$ cualquiera se $v \in \mathcal{B}$ y por lo tanto, como $\mathcal{B}$ es base, $M = 0$.

□

Lema 3.2.2. *Sea A con todos sus valores propios con parte real negativa y sea N una matriz simétrica definida negativa. Entonces $M = L_A^{-1}(N)$ es definida positiva.*

Demostración. Observemos primero que $A \to L_A$ y $A \to L_A^{-1}$ son continuas con A. Por otro lado observamos que si $L_A(M) = N$ con N definida negativa entonces 0 no es valor propio de M ya que de lo contrario, si $Mv = 0$ entonces $0 = 2 < Mv, Av >=< Nv, v >< 0$.

Tambien observemos que $L_{-I}(N) = M_{-I}$ es definida positiva ya que $-2 < M_{-I}x, x >= 2 < M_{-I}x, -x >=< Nx, x >< 0$ si $x \neq 0$.

De ahora en adelate fijamos N definida negativa. Sea $A_s, s \in [0,1]$ una isotopía tal que $A_0 = -I,\ A_1 = A$ y A_s siempre tiene sus valores propios con parte real negativa. Sea $L_s = L_{A_s}$ y $M_s = L_s^{-1}(N)$. Luego M_s depende continuamente con s, M_s no tiene valor propio 0 para todo $s \in [0,1]$ y M_0 es definida positiva. Concluimos que $M_1 = L_A^{-1}(N)$ es definida positiva pues tiene todos sus valores propios positivos.

□

Teorema 3.2.1. *Sea A con valores propios con parte real negativa. Entonces* 0 *es asintoticamente estable de $\dot{x} = Ax$.*

Demostración. Por los lemas anteriores encontramos $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma cuadrática definida positiva $V(x) =< Mx, x >$ con $\dot{V}(x) =< (MA + A^tM)x, x >$ definida negativa. Por el teorema 3.1.2 concluimos el resultado. □

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & x & + & 2y \\ \dot{y} & = & -3x & - & 3y \end{array}$$

Entonces $(0,0)$ es asintoticamente estable ya que los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

tiene parte real negativa.

Mostraremos ahora que si A tiene todos sus valores propios con parte real negativa entonces tenemos un comportamiento exponencial del flujo.

Teorema 3.2.2. *Sea A tal que todos sus valores propios tiene parte real negativa y sea ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$. Entonces existe $C > 0$ y $a > 0$ tal que si $x \neq 0$ entonces*

$$\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\| \; \forall \, t \geq 0.$$

Demostración. Sea $V(x) =< Mx, x >$ función de Lyapunov cuadrática asociada a A. Como ϕ_t es lineal y V es cuadratica tenemos que

$$V(\phi_t(x)) = b^2 V(\phi_t(\frac{x}{b}))$$

para cualquier $b \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{E} = \{x : V(x) = 1.\}$ Como $V(\phi_t(x))$ es estrictamente decreciente por ser $\dot{V}$ definida negativa tenemos que existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $x \in \mathcal{E}$ entonces $V(\phi_1(x)) < \lambda$. Por lo tanto

$$V(\phi_1(x)) < \lambda V(x)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto para $n \geq 0$ deducimos que $V(\phi_n(x)) < \lambda^n V(x)$. Sea $t \geq 0$ y escribimos $t = n + r$ con $0 \leq r < 1$. Luego $V(\phi_t(x)) < \lambda^t \frac{1}{\lambda} V(x)$. Como V es cuadrática definida positiva, existe d y D positivos tal que

$$d\|x\|^2 \leq V(x) \leq D\|x\|^2.$$

Por lo tanto

$$d\|\phi_t(x)\|^2 \leq V(\phi_t(x)) < \lambda^t \frac{D}{\lambda}\|x\|^2.$$

Haciendo $C = \sqrt{\frac{D}{\lambda d}}$ y $-a = \frac{1}{2}\log\lambda$. se tiene el resultado.

□

Corolario 3.2.1. *Sean A y ϕ_t como en el teorema anterior. Entonces existen C_1 y $a > 0$ tal que*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \geq C_1 e^{at}\|x\| \; \forall \, t \geq 0.$$

Demostración. Como

$$\|x\| = \|\phi_t(\phi_{-t}(x))\| < Ce^{-at}\|\phi_{-t}(x)\|$$

y por lo tanto

$$\|\phi_{-t}(x)\| > \frac{1}{C}e^{at}\|x\|.$$

□

Corolario 3.2.2. *Sean* A, ϕ_t *como en el teorema anterior y sea* V *una forma cuadrática asociada a* $\dot{x} = Ax$*. Entonces. si* $x \neq 0$*,*

$$\lim_{t\to\infty} V(\phi_t(x)) = 0 \quad \lim_{t\to-\infty} V(\phi_t(x)) = \infty.$$

Corolario 3.2.3. *Sea* B *una matriz tal que todos sus valores propios tengas parte real positiva y sea* ϕ_t *el flujo de* $\dot{x} = Bx$*. Entonces existe* $C > 0$ *y* $a > 0$ *tal que si* $x \neq 0$ *entonces*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\| \;\forall\; t \geq 0$$

y

$$\|\phi_t(x)\| \geq C_1 e^{at}\|x\| \;\forall\; t \geq 0.$$

Obtendremos ahora resultados sobre el punto de equilibrio x_0 de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ a partir de la aproximación lineal en dicho punto.

Teorema 3.2.3. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo y* x_0 *una singularidad, es decir,* $f(x_0) = 0$*. Sea* $A = df_{x_0}$*. Entonces, si todos los valores propios de* A *tienen parte real negativa,* x_0 *es un punto de equilibrio asintoticamente estable de* $\dot{x} = f(x)$*.*

Demostración. Mediante un cambio de coordenadas podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_0 = 0$. El campo puede escribirse como

$$f(x) = Ax + R(x) \text{ donde } \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0.$$

La idea es mostrar que la función de Lyapunov cuadrática para $\dot{x} = Ax$ también sirve para $\dot{x} = f(x)$. Consideremos entonces $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) =< Mx, x >$ donde M es definida positiva y $N = MA + A^tM$ es definida negativa. Como N es definida negativa existe $a > 0$ tal que $< Nx, x > \leq -a\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\eta > 0$ tal que

$$2\|M\|\eta < a.$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que si $\|x\| \leq \epsilon$ entonces

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} < \eta.$$

Veremos que $\dot{V}$ para el campo $f(x)$ es negativa en $B(0, \epsilon)$ con lo cual aplicando el teorema 3.1.2 concluiríamos la demostración. Supondremos en lo que sigue que $0 \neq \|x\| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= < M\dot{x}, x > + < Mx, \dot{x} > \\
&= < Mf(x), x > + < Mx, f(x) > \\
&= < M(Ax + R(x)), x > + < Mx, Ax + R(x) > \\
&= < (MA + A^t M)x, x > +2 < MR(x), x > \\
&\leq -a\|x\|^2 + 2\|M\|\|R(x)\|\|x\| \\
&= \|x\|^2 \left(-a + 2\|M\| \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \right) \\
&< \|x\|^2 \left(-a + 2\|M\|\eta \right) < 0.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo: El origen es asintoticamente estable de

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -x \quad +x^3 \quad y^2 \\
\dot{y} &= -2y \quad 3x^2 y
\end{aligned}$$

ya que su parte lineal es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.2.1. Campos lineales hiperbólicos

Teorema 3.2.4. *Sea A tal que todos sus valores propios tengan parte real negativa. Entonces los flujos de $\dot{x} = Ax$ y de $\dot{x} = -x$ son conjugados.*

Demostración. Denotemos por ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$ y por ψ_t el flujo de $\dot{x} = -x$. Observemos que si $x \neq 0$ entonces existe un $t = t(x)$ tal que $\|\psi_t(x)\| = 1$, es decir, la trayectoria por x corta a la esfera unitaria S^n en un único punto $(\psi_t(x) = e^{-t}x)$.

Sea $V(x) =< Mx, x >$ función de Lyapunov asociada a $\dot{x} = Ax$ con M definida positiva y $N = MA + A^t M$ definida negativa. Demostremos que si $x \neq 0$ entonces existe un único $t = t(x)$ tal que $V(\phi_t(x)) = 1$, es decir, la trayectoria por x intersecta al elipsoide $\mathcal{E} = \{x :< Mx, x >= 1\}$ en un unico punto. Por el corolario 3.2.2 sabemos que existe algún $t = t(x)$ tal que $V(\phi_t(x)) = 1$ y por otro lado como $V(\phi_t(x))$ es una función estrictamente decreciente ese $t = t(x)$ es único.

Sea $h : S^n \to \mathcal{E}$ un homeomorfismo cualquiera. Definiremos una conjugación $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entre ϕ y ψ. Si $x \neq 0$ sea t_x tal que $\psi_t(x) \in S^n$ y definimos

$$H(x) = \phi_{-t_x} \circ h \circ \psi_{t_x}(x).$$

Definiendo $H(0) = 0$ es facil ver que H es un homeo que conjuga los flujos.

$\square$

Corolario 3.2.4. *Sean A y B matrices con todos los valores propios con parte real negativa, entonces los flujos de $\dot{x} = Ax$ y de $\dot{x} = Bx$ son conjugados.*

Definición 3.2.1. Decimos que un campo lineal $\dot{x} = Ax$ es hiperbólico si A no tiene valores propios con parte real nula.

Teorema 3.2.5. *Sea $\dot{x} = Ax$ un campo lineal hiperbólico y sea ϕ_t el flujo correspondiente. Entonces existen subespacios E^s y E^u y constantes $C > 0$ y $a > 0$ tales que*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $\phi_t(E^s) = E^s$ *y* $\phi_t(E^u) = E^u$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $x \in E^s$ *entonces* $\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ *para* $t \geq 0$.
4. *Si* $x \in E^u$ *entonces* $\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ *para* $t \geq 0$.

Demostración. Sea E^s la suma de todos los subespacios generalizados de A asociados a valores propios con parte real negativa y E^u el correspondiente a los valores propios con parte real positiva. Entonces $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Por otra parte como $A(E^s) = E^s$ y $A(E^u) = E^u$ deducimos la invariancia por el flujo de estos subespacios. Ademas $A^s = A/E^s$ da un campo lineal con todos los valores propios negativos y $A^u = A_{/E^u}$ da un campo con todos los valores propios positivos concluimos el resultado de los corolarios 3.2.2 y 3.2.1. $\square$

Definición 3.2.2. Sea $\dot{x} = Ax$ campo lineal hiperbólico. Se lama *indice (de Morse)* de A a la dimensión del subespacio E^s. Al subespacio E^s (respec. E^u) lo llamaremos subespacio estable (respec. inestable). Diremos que el origen es *atractor* si $E^s = \mathbb{R}^n$, *repulsor* si $E^u = \mathbb{R}^n$ y *silla* en los demas casos.

Teorema 3.2.6. *Sean $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ dos campos hiperbólicos que tienen el mismo indice y sean ϕ_t y ψ_t los respectivos flujos. Entonces ϕ_t y ψ_t son conjugados.*

Demostración. Sean E_A^s y E_B^s los subespacios estables de ϕ_t y ψ_t respectivamente. Como $dimE_A^s = dimE_B^s$ concluimos que $\phi_t^s = \phi_t/E_A^s$ y $\psi_t^s = \phi_t/E_B^s$ son conjugados por $h^s : E_A^s \to E_B^s$ en base al corolario 3.2.4

Analogamente $\phi_t^u = \phi_t/E_A^u$ y $\psi_t^u = \phi_t/E_B^u$ son conjugados por $h^u : E_A^u \to E_B^u$.

Definiendo $h : \mathbb{R}^n = E_A^s \oplus E_A^u \to \mathbb{R}^n = E_B^s \oplus E_B^u$ por $h = h^s \oplus h^u$ tenemos que h es una conjugación (por la linealidad de los flujos).

□

Concluimos esta sección enunciando un teorema que probaremos en el siguiente capítulo. Primero precisamos una definición.

Definición 3.2.3. Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 y sea x_0 una singularidad. Decimos que x_0 es una singularidad hiperbólica si $\dot{x} = dF_{x_0}x$ es un campo lineal hiperbólico. La singularidad es de tipo *atractor, repulsor o silla* acorde con el caracter del origen en $\dot{x} = dF_{x_0}x$.

Teorema 3.2.7 (Hartman-Grobman)**.** *Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 y sea x_0 una singularidad hiperbólica con $A = dF_{x_0}$. Entonces el flujo de $\dot{x} = F(x)$ y el flujo de $\dot{x} = Ax$ son localmente conjugados, es decir, existe $U(x_0), V(0)$ y $h : U \to V$ homeo tal que*
$$h \circ \phi_t^F = \phi_t^A \circ h.$$

3.3. Flujo Tubular

Definición 3.3.1. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo y $p \in \Omega$. Una sección tranversal local en p es un subconjunto $\Sigma \subset \Omega$ tal que $p \in \Sigma$ y tal que existe $h : B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable e inyectiva con B^{n-1} una bola en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\Sigma = h(B^{n-1})$ y tal que para todo $x \in B^{n-1}$ se tiene que
$$\mathbb{R}^n = dh_x(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus X(h(x)).$$

Observamos en la definición anterior que necesariamente $X(p) \neq 0$.

Proposición 3.3.1. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo y sea $p \in \Omega$ tal que $X(p) \neq 0$. Entonces existe una sección transversal local en p.*

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base ortonormal de $X(p)^\perp$ y definimos $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ por $h(x_1, \ldots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$. Existe $\delta > 0$ tal que si

$\|q - p\| \leq \delta$ entonces $< X(p), X(q) > \neq 0$. Luego $\Sigma = h(B^{n-1}(0,\delta))$ es una sección trasversal local. $\square$

Teorema 3.3.1 (Flujo Tubular)**.** *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo $C^r, r \geq 1$ y $p \in \Omega$ tal que $X(p) \neq 0$. Entonces existen $\epsilon > 0, \delta > 0$, un entorno $U(p)$ de p y un difeomorfismo C^r $H : U(p) \to (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta)$ tal que si $q \in U(p)$ entonces*

$$dH_q(X(q)) = (1, 0, \ldots, 0).$$

En particular H es una C^r conjucación entre el flujo de X en U y el flujo del campo constante horizontal $Y = (1, 0, \ldots, 0)$ en $(-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta)$.

Demostración. Sea $h : B^{n-1}(0,\eta) \to \mathbb{R}^n$ una sección transversal local en p con $h(0) = p$. Definimos $F : \mathbb{R} \times B^{n-1}(0,\eta) \to \Omega$ por

$$F(t,x) = \phi_t(h(x))$$

donde ϕ_t es el flujo de X. Ahora, $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}_{|(0,0)} = X(p)$ y $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}_{|(0,0)} = dh_0$. Por lo tanto $dF_{(0,0)}$ es un isomorfismo y luego F es un C^r difeomorfismo local. Luego existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $F_{/(-\epsilon,\epsilon)\times B^{n-1}(0,\delta)}$ es un difeomorfismo de $(-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta)$ en $U = F((-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta)$ abierto que contiene a $F(0,0) = p$. Observemos que si $F(t,x) = q$

$$dF_{(t,x)}(1, 0 \ldots, 0) = \frac{d}{dt}F(t,x)_{|(t,x)} = \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)) = X(q).$$

Luego $H : U \to (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta),\ H = F^{-1}$ es el difeomorfismo buscado.

$\square$

Corolario 3.3.1. *En las mismas condiciones del teorema anterior sea $\Pi : U(p) \to \Sigma$ definido como $\Pi(q) = \phi_{t(q)}(q)$ donde $t(q)$ es tal que $|t| < \epsilon$ y $\phi_t(q) \in \Sigma$. Entonces V esta bien definida y es de clase C^r.*

Demostración.

$$\Pi = F \circ \Pi_2 \circ H.$$

$\square$

3.4. Teorema de Poincare-Bendixon

En esta sección estudiaremos campos y flujos en $\mathbb{R}^2$. La dimensión dos y la topologia del plano imponen ciertas restricciones sobre la dinámica:

Teorema 3.4.1 (Poincare-Bendixon). *Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo C^1 y sea $p \in \Omega$ tal que $\omega(p)$ es un compacto en Ω. Supondremos que $\omega(p)$ contiene a lo sumo una cantidad finita de singularidades. Entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones se verifica:*

1. *$\omega(p)$ es una sola singularidad.*
2. *$\omega(p)$ es una única orbita periódica.*
3. *Si $\omega(p)$ tiene puntos regulares y singulares entonces para todo $q \in \omega(p)$ regular se tiene que $\alpha(q)$ y $\omega(q)$ son singularidades. Si x_0 es una singularidad en $\omega(p)$ entonces existen $q_1, q_2 \in \omega(p)$ regulares tales que $\omega(q_1) = x_0 = \alpha(q_2)$.*

La demostración está basada en una serie de lemas que demostraremos a seguir y en el siguiente conocido teorema de Jordan que enunciaremos sin demostración.

Teorema 3.4.2 (Jordan). *Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada. Entonces $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Observemos que como estamos en $\mathbb{R}^2$ una sección transversal local es la imagen de un intervalo y por lo tanto se puede orientar. En lo que sigue siempre que tomemos una sección transversal local la consideraremos orientada. Además siempre supondremos que esta sección transversal es parte de un abierto donde se aplica el teorema del flujo tubular.

Lema 3.4.1. *Sea $q \in \omega(p)$ un punto regular y Σ una sección transversal local por q. Entonces existe una sucesión $t_k \nearrow \infty$ tal que $\Sigma \cap \mathcal{O}^+(p) = \{\phi_{t_k}(p) : k = 1, 2, \ldots\}$ y la sucesión $p_k = \phi_{t_k}(p) \subset \Sigma$ es monótona.*

Demostración. Observemos primeramente que $T = \{t \geq 0 : \phi_t(p) \in \Sigma\}$ es discreto (esto es consecuencia inmediata del flujo tubular) y T es infinito ya que $q \in \omega(p)$. Luego $T = \{t_k\}$ que crece a infinito.

Para demostrar la monoticidad basta mostrar que si $p_{i-1} < p_i$ según la orientación de Σ entonces $p_i < p_{i+1}$. Consideremos $\gamma = [p_{i-1}, p_i] \cup \{\phi_t(p) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ donde $[p_{i-1}, p_i]$ es el intervalo en Σ determinado por los puntos p_{i-1}, p_i. Como γ es una curva simple cerrada divide a $\mathbb{R}^2$ en dos componentes A y B. Observemos que para $0 < s < \epsilon$ se tiene que $\phi_s(p_i)$ pertenece a una de estas componentes que llamaremos A. Esta componente tambien contiene a

$\phi_s(x),\ x \in (p_{i-1}, p_i]$ con $0 < s < \epsilon$ y también a $\{x \in \Sigma : x > p_i\}$. Por otro lado la otra componente B contiene a $\phi_s(x),\ x \in [p_{i-1}, p_i)$ con $-\epsilon < s < 0$ y tambien a $\{x \in \Sigma : x < p_{i-1}\}$. Como $\{\phi_t(p) : t_i < t < t_{i+1}\} \cap \gamma = \emptyset$ deducimos que $\{\phi_t(p) : t_i < t < t_{i+1}\} \subset A$ y por lo tanto, como $p_{i+1} \notin [p_{i-1}, p_i]$ concluimos que $p_{i+1} > p_i$.

$\square$

Corolario 3.4.1. *Sea* Σ *una sección transversal local. Entonces* $\omega(p) \cap \Sigma$ *consiste a lo mas de un punto.*

Lema 3.4.2. *Sea* $q \in \omega(p)$ *regular. Si* $\omega(q)$ *contiene puntos regulares entonces* q *es periodico y* $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$*. Analogamente, si* $\alpha(q)$ *contiene puntos regulares entonces* q *es periodico y* $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$*.*

Demostración. Sea $z \in \omega(q)$ regular y sea Σ sección transversal local por z. Luego $\mathcal{O}^+(q) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Por otra parte $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$ y por el corolario 3.4.1 deducimos que $z \in \mathcal{O}(q)$. Luego $\mathcal{O}(q) = \omega(q)$ y deducimos que q es periodico ya que necesariamente $q \in \mathcal{O}^+(q)$.

Probemos ahora que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$. Por el corolario 3.4.1, para cada sección transersal Σ_z por $z \in \mathcal{O}(q)$ tenemos que $\omega(p) \cap \Sigma_z = z$. Esto implica que (cubriendo $\mathcal{O}(q)$ con una cantidad finita de entornos tubulares) que $\mathcal{O}(q)$ es aislado en $\omega(p)$. Como $\omega(p)$ es conexo deducimos que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$.

$\square$

Lema 3.4.3. *Sea* x_0 *una singularidad tal que* $x_0 \subsetneq \omega(p)$*. Entonces existen* $q_1, q_2 \in \omega(p)$ *regulares tales que* $\omega(q_1) = x_0 = \alpha(q_2)$*.*

Demostración. Sea $B = B(x_0, \epsilon)$ tal que $sing(\omega(p)) \cap B = \{x_0\}$ y tal que $\omega(p) \cap B^c \neq \emptyset$. Sea $t_k \to \infty$ tal que $\phi_{t_k} \to x_0$. y consideremos $t_k^s = \text{mín}\{t > t_k : \phi_t(p) \notin B\}$ y $t_k^i = \text{máx}\{t < t_k : \phi_t(p) \notin B\}$. Es facil ver que

$$t_k^s \to_k \infty,\ t_k^i \to_k \infty,\ t_k^s - t_k \to_k \infty,\ t_k - t_k^i \to_k \infty.$$

Sea q_1 punto de acumulación de $\phi_{t_k^i}(p)$ y q_2 punto de acumulación de $\phi_{t_k^s}(p)$. Luego $q_1, q_2 \in \omega(p)$. Por otro lado $\mathcal{O}^+(q_1) \subset B$ y $\mathcal{O}^-(q_2) \subset B$. Por el lema 3.4.2 $\omega(q_1) \subset sing(\omega(p))$ concluimos que $\omega(q_1) = x_0$. Analogamente $\alpha(q_2) \subset sing(\omega(p))$ y entonces $\alpha(q_2) = x_0$. $\square$

Demostración del teorema 3.4.1:

1. Si $\omega(p)$ solo contiene puntos singulares entonces $\omega(p)$ es una única singularidad ya que $\omega(p)$ es conexo y contiene a lo suma una cantidad finita de singularidades.
2. Si $\omega(p)$ solo contiene puntos regulares entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica por el lema 3.4.2
3. Supongamos que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares. Sea $q \in \omega(p)$ regular. Entonces, como $\omega(p)$ contiene puntos singulares, por el lema 3.4.2 y por el argumento en en comienzo de esta demostración deducimos que $\omega(q)$ es una sola singularidad. Analogamente $\alpha(q)$ tambien es una singularidad. El resto se deduce del lema 3.4.3

Observación 3.4.1. En realidad el teorema de Poincare-Bendixon es valido no solo en el plano sino en cualquier superficie donde sea válido el enunciado del teorema de Jordan. Estas superficies incluyen a la esfera y al cilindro en particular.

Una consecuencia del teorema de Poincare-Bendixon es sobre la existencia de singularidades. Si bien hay teoremas profundos (Poincare-Hofp) que relacionan la existencia de singularidades con la topologia, no nos basaremos en estos.

Corolario 3.4.2. *Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo que tiene una órbita periodica. Entonces X tiene una singularidad.*

Demostración. Supongamos que no hubiera singularidad. Si γ es una órbita periodica denotamos por $int(\gamma)$ la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ y por $\Gamma = \gamma \cup \int(gamma)$. Ordenaremos el conjunto $\mathcal{F}$ de las orbitas periódicas por inclusión:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_2 \subset \Gamma_1.$$

Sea $\mathcal{C}$ una cadena totalmente ordenada y sea $A = \cap_{\gamma \in \mathcal{C}} \Gamma$. Luego $A \neq \emptyset$ por la P.I.F. Ademas A es invariante por el flujo y como no hay puntos singulares, todo punto de A es regular. Sea $p \in A$. Deducimos que $\omega(p) \subset A$ es una orbita periódica mas grande que cualquier elemento de $\mathcal{C}$. Luego $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal por el lemma de Zorn. Luego existe γ orbita periódica sin ninguna otra órbita periódica en su interior. Sea $p \int \gamma$. Luego $\alpha(p) = \omega(p) = \gamma$. Esto es absurdo por el lema **??** $\square$

Corolario 3.4.3. *Sea X un campo C^1 tangente en S^2. Luego X tiene una singularidad.*

3.5. Ejercicios

1. Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y^3 \\ \dot{y} &= x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= -2y + yz \\ \dot{y} &= x - xz \\ \dot{z} &= xy \end{cases}$$

2. Sea $\dot{x} = f(x)$ y sea x_0 un punto de equilibrio. Sea $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ continua tal que $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$ y $V(x_0) = 0$ y tal que $\dot{V} > 0$. Probar que x_0 es asintoticamente estable en el pasado (e inestable en el futuro).

3. Croquizar las trayectorias de $\dot{x} = Ax$ donde A es 2×2 discutiendo según los valores propios de A.

4. Sea f un campo en $\mathbb{R}^2$ tal que 0 es un punto de equilibrio. Supongamos que existe una bola $B(0)$ tal que no hay ninguna otra singularidad en B ni tampoco ninguna órbita periódica totalmente contenida en B. Supongamos que $V(x, y) = x^2 + y^2$ verifica que $\dot{V} \leq 0$. Probar que 0 es asintoticamente estable.

5. Croquizar (o dar explicitamente) un campo en $\mathbb{R}$ tal que 0 es una singularidad estable pero no existe V con $V(0) = 0$ y $V(x) > 0 \ \forall\, x \neq 0$ y tal que $\dot{V} \leq 0$.

6. Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio via la aproximación lineal de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y^2 x \\ \dot{y} &= y^2 - 1 + x \end{aligned}$$

7. Croquizar y determinar cuáles de los siguientes sistemas lineales $\dot{x} = A_i x$ son conjugados:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Probar que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + x^4 + y^2(x+1)\\ \dot{y} &= y(x^2+1)\end{aligned}$$

no tiene ninguna órbita periódica.

9. Consideremos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x^3\\ \dot{y} &= x + y - y^3\end{aligned}$$

Pruebe que hay una órbita periódica en la región $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Sugerencia: Estudiar que sucede en las curvas de nivel de $V(x, y) = x^2 + y^2$.

10. Sea X un campo en $\mathbb{R}^2$ tal que 0 es una singularidad estable. Probar que una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

    a) hay una sucesión de singularidades que convergen a 0.

    b) hay una sucesión de órbitas periodicas que convergen a 0

    c) 0 es asintóticamente estable.

11. Sean ϕ_t y ψ_t dos flujos de clase C^1 en S^2 que conmutan, i.e., $\phi_t \circ \psi_s = \psi_x \circ \phi_t$ para todo s, t. Probar que ϕ_t y ψ_t tienen una singularidad en común.

Capítulo 4

Hiperbolicidad: una breve introducción

La hiperbolicidad representa un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas llamados "caóticos"(son sistemas inherentemente impredecibles) a pesar de lo cual se tiene un descripción bastante completa de su dinámica. Por otro lado tienen propiedades de estabilidad, lo que implica que esta "caoticidad" no se destruye por pequeñas perturbaciones del sistema.

Comenzaremos estudiando transformaciones lineales hiperbólicas donde, a pesar de la dinámica ser trivial (por no existir recurrencia no trivial), varias de las ideas y métodos de la teoría se presentan de forma mas elemental.

Seguiremos luego con lo que es llamada la teoría hiperbólica local y el teorema de Hartman. Luego estudiaremos dos ejemplos clásicos de la dinámica hiperbólica.

4.1. Transformaciones lineales hiperbólicas

Definición 4.1.1. Una transformación lineal (invertible) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *hiperbólica* si todos sus valores propios tienen módulo diferente de 1.

Lema 4.1.1. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica tal que todos sus valores propios tienen módulo menor que 1. Entonces existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$, $n \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Es fácil ver que existe n_0 tal que $\|A^{n_0}\| < \gamma < 1$. Sea $C_1 = \sup\{\|A^j\| : j = 0, ..., n_0\}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0}$. Dado cualquier $n \geq 0$, escribimos $n = kn_0 + r$ con $0 \leq r < n_0$. Resulta entonces que

$$\|A^n\| \leq \|A^{kn_0}\|\|A^r\| \leq C_1\gamma^k \leq \frac{C_1}{\gamma}\lambda^n = C\lambda^n.$$

□

Lema 4.1.2. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Entonces existen subespacios E^s, E^u (llamados subespacio estable e inestable respectivamente) tales que:*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $A(E^s) = E^s$, $A(E^u) = E^u$, *es decir, E^s y E^u son invariantes por A.*
3. *Existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$\|A^n v\| \leq C\lambda^n\|v\|, n \geq 0,\ v \in E^s \quad y \quad \|A^{-n}v\| \leq C\lambda^n\|v\|, n \geq 0,\ v \in E^u.$$

4. *Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos $E^s_x = x + E^s$ y $E^u_x = x + E^u$. Se tiene que si $y \in E^s_x \Longrightarrow \|A^n y - A^n x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$ si $n \geq 0$. Análogamente, para $n \geq 0$ e $y \in E^u_x$ se tiene que $\|A^{-n}y - A^{-n}x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

4.1.1. Estabilidad

Lema 4.1.3 (Norma adaptada)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hiperbólica, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacio estable e inestable. Entonces existe un norma $\|.\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$ tal que*

$$\|A_{/E^s}\|_1 < a < 1 \quad y \quad \|A^{-1}_{/E^u}\|_1 < a < 1.$$

Demostración. Supongamos primeramente que $E^s = \mathbb{R}^n$. Sabemos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Consideremos n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Fijado n_0 definimos una nueva norma $\|.\|_s$ definida por

$$\|v\|_s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\|.$$

Es fácil ver que existe K tal que $\|v\|_s \leq K\|v\|$. Luego observamos que:

$$\begin{aligned}
\|Av\|_s &= \sum_{j=1}^{n_0} \|A^j v\| = \|v\|_s + \|A^{n_0} v\| - \|v\| \leq \|v\|_s + (C\lambda^{n_0} - 1)\|v\| \\
&\leq \left(1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{K}\right) \|v\|_s = a\|v\|_s.
\end{aligned}$$

Ahora, en el caso $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, aplicando lo anterior construimos normas $\|.\|_s$ y $\|.\|_u$ en E^s y E^u respectivamente tales que $\|A_{/E^s}\|_s < a < 1$ y $\|A^{-1}_{/E^u}\|_u < a < 1$. Basta definir entonces, escribiendo $v = (v_s, v_u)$ con respecto a la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, la norma $\|.\|_1$ como

$$\|v\|_1 = \text{máx}\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}.$$

$\square$

Definición 4.1.2. Sea $K > 0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{R}^n$ es una K-pseudo-órbita (con respecto a $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) si $\|Ax_n - x_{n+1}\| \leq K \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.1.4 (Propiedad de sombreado)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^n z - x_n\| \leq \alpha \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Comencemos con un caso particular:

Sublema: *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal tal que $\|A\| < a < 1$ y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^m z - x_m\| \leq \alpha \ \ \forall m \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos $x_m : \ m \geq 0$. Observemos que por ser A una contracción tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A^m x_0 - x_m\| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-j} x_j - A^{m-(j+1)} x_{j+1}\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-(j+1)}(Ax_j - x_{j+1})\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} a^{m-(j+1)} K \\
&= K \sum j = 0^{m-1} a^j \leq \frac{K}{1-a}
\end{aligned}$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{K}{1-a}$, cualquier K-pseudo órbita positiva $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es sombreada (a menos de α) por la órbita positiva según A de un punto $w = w(x_0)$. Re-indexando la sucesión $\{x_n\}_{n\geq -m}$ encontramos un punto w_m tal que

$$\|A^{n+m}w_m - x_n\| \leq \alpha \;\; n \geq -m.$$

Escribiendo $z_m = A^m w_m$ concluimos que $\|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha$ para cualquier $n \geq -m$. Tomando z un punto de acumulación de z_m (y suponiendo que $\lim_m z_m = z$) concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\|A^n z - x_n\| = \lim_m \|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha.$$

Finalmente, tal punto z debe ser único (¿por qué?). □

Cotinuemos ahora con la demostración de la propiedad del sombreado.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ correspondiente a $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y escribimos $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_s, x_u)$ con respecto a esta descomposición. Vamos a trabajar con la norma adaptada encontrada en el lema anterior y que notaremos por comodidad $\|.\|$.

Sea $x_m,\; m \in \mathbb{Z}$ una K-pseudo órbita y tomemos $\alpha = \frac{K}{1-a}$. Excribimos $x_m = (x_s^m, x_u^m)$. Aplicando el sublema a $A_{/E^s}$ y a $A_{/E^u}$ concluimos que existe y_s e y_u tal que $\|A^m y_s - x_s^m\| \leq \alpha$ y $\|A^m y_u - x_u^m\| \leq \alpha$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Luego $y = (y_s, y_u)$ es el punto cuya órbita por A sombrea x_m.

□

Lema 4.1.5. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo y $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces $G = A + g$ es expansivo con constante de expansividad infinita.*

Demostración. Por comodidad seguimos trabajando con la norma adaptada para A y con la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Consideremos $x \neq y$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos primero que $\|x - y\| = \|x_u - y_u\|$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \|(A+g)(x) - (A+g)(y)\| \geq \|Ax - Ay\| - \|g(x) - g(y)\| \\ &\geq a^{-1}\|x_u - y_u\| - \epsilon\|x - y\| = (a^{-1} - \epsilon)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma análoga vemos que $\|(G(x) - G(y))_s\| \leq (a + \epsilon)\|x - y\|$. Concluimos que si ϵ es tal que $a + \epsilon < 1 < a^{-1} - \epsilon$ entonces $\|G(x) - G(y)\| =$

$\| (G(x) - G(y))_u \|$ y $\|G(x)-G(y)\| \geq (a^{-1}-\epsilon)\|x-y\|$. Inductivamente tenemos que $\|G^n(x) - G^n(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n \|x - y\| \to_{n\to+\infty} \infty$.

Razonando de la misma manera en el caso $\|x - y\| = \|x_s - y_s\|$ concluimos que $\|G^{-n}(x) - G^{-n}(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n \|x - y\| \to_{n\to+\infty} \infty$.

□

Teorema 4.1.1 (Estabilidad global de mapas lineales hiperbólicos)**.** *Sea* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineal hiperbólica. Existe* $\epsilon > 0$ *tal que si* $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es un homeomorfismo que verifica* $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ *y* $G - A$ *tiene constante de Lipschitz menor que* ϵ *entonces* G *y* A *son conjugados.*

Demostración. Tenemos que hallar un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $H \circ G = A \circ H$. Sea $K > 0$ tal que $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < K$. Vemos entonces que dado cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ la órbita según G, $\{G^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, es una K-pseudo órbita de A. Por la propiedad del sombreado concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\|A^n z - G^n(x)\| \leq \alpha \text{ para cualquier } \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Definimos entonces $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $H(x) = z$ donde z es el único punto que verifica (4.1). En otras palabras $\|A^n(H(x)) - G^n(x)\| \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos primeramente que H conjuga G con A. En efecto, tenemos que $\|A^n(A \circ H(x)) - G^n(G(x))\| \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $H(G(x)) = A(H(x))$. De ahí que nos falta probar únicamente que H es un homeomorfismo.

<u>H es continua:</u> sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea x_m una sucesión tal que $x_m \to x$. Queremos probar que $H(x_m) \to H(x)$. Sea $H(x_{m_k})$ una subsucesión de $H(x_m)$ que converge a un punto y y sea $p \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Observamos que

$$\|A^p y - G^p(x)\| = \lim_k \|A^p(H(x_{m_k})) - G^p(x_{m_k})\| \leq \alpha$$

y por lo tanto $y = H(x)$. Como $H(x_m)$ es un sucesión acotada (por serlo x_m) concluimos que $H(x)$ es el único punto de acumulación de $H(x_m)$. Luego $H(x_m) \to H(x)$ y probamos que H es continua.

<u>H es inyectiva:</u> Esto es consecuencia de la expansividad de G. En efecto, supongamos que $H(x_1) = H(x_2)$. Deducimos que $\|G^n(x_1) - G^n(x_2)\| \leq 2\alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

<u>H es sobreyectiva:</u> Supongamos que $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) \neq y \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\overline{B} = \overline{B(0, 4\alpha)}$ la bola (cerrada) de radio 4α centrada en el origen

y la función $g : \overline{B} \to \partial\overline{B}$ definida por $g(x) = 4\alpha \frac{H(x+y)-y}{\|H(x+y)-y\|.}$ Es fácil ver que si $x \in \partial\overline{B}$ entonces $g(x) \neq -x$. Por lo tanto tenemos una función continua de la bola en el borde de la misma y tal que en el borde es (isotópica a) la identidad. Esto contradice el Teorema del punto fijo de Brower.

<u>H^{-1} es continua:</u> Es similar a la prueba de la continuidad de H. □

4.2. Puntos fijos hiperbólicos: Teorema de Hartman

Definición 4.2.1. Sea $f : \Omega \to \Omega$ difeomorfismo del abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y p un punto fijo de f. Decimos que p es hiperbólico si Df_p es hiperbólica (no tiene valores propios de módulo uno). Un punto periódico de período k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de f^k.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Hartman)**.** *Sea $f : \Omega \to \Omega$ un difeomorfismo y $p \in \Omega$ un punto fijo hiperbólico de f. Entonces f y Df_p son localmente conjugados. Mas precisamente, existe U_p entorno de p y V entorno de* 0 *y un homeomorfismo $h : U \to V$ tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

Demostración. Podemos suponer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $p = 0 = f(0)$ es punto fijo hiperbólico y consideremos el mapa lineal hiperbólico $A = Df_0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es acotada y tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces A y $A + g$ son conjugados por la estabilidad de A (Teorema 4.1.1).

Por otra parte, escribimos $f(x) = Ax + \phi(x)$, donde ϕ es C^1, $\phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|\phi(x)\| \leq \frac{\epsilon}{8}\|x\|$ y $\|D\phi_x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Consideremos una función "chichón" $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2, \rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = Ax + \rho(x)\phi(x)$. Resulta que $G(x) = f(x)$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$. Por otra parte $DG_x - A = \rho(x)D\phi_x + \phi^T.\nabla\rho(x)$ que es idénticamente nulo si $\|x\| \geq \delta$ y cuando $\|x\| \leq \delta$ tenemos:

$$\|DG_x - A\| \leq |\rho(x)|\|D\phi_x\| + \|\phi(x)\|\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8}\|x\|\frac{4}{\delta} \leq \epsilon.$$

En consecuencia $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ. Por otra parte es facil ver que si ϵ es suficientemente chico entonces G es inyectiva y por la condición del diferencial DG_x se tiene G tambien es abierta y por lo tanto un homeo de $\mathbb{R}^n$. Concluimos que existe $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $H \circ G = A \circ H$. Tomemos $U = B(0, \delta/2)$, $V = H(U)$ y $h = H_{/U}$. Como $G = f$ en U concluimos que $h \circ f = A \circ h$ como queríamos. □

Definición 4.2.2. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo y $x \in M$. Se define el *conjunto estable* de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \to_{n\to+\infty} 0\}$$

y el *inestable* como

$$W^u(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \to_{n\to+\infty} 0\}.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos el *conjunto estable e inestable local* (de tamaño ϵ) como

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \leq \epsilon \ \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \epsilon \ \forall n \geq 0\}.$$

Corolario 4.2.1. *Sea f difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que:*

1. $W^s_\epsilon(p) \subset W^s(p)$ *y* $W^u_\epsilon(p) \subset W^u(p)$.
2. $W^s_\epsilon(p)$ *(respec. $W^u_\epsilon(p)$) es una subvariedad topológica de la misma dimension que el espacio estable (respect. inestable).*
3. $W^s(p) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p))$ *y* $W^u(p) = \cup_{n\geq 0} f^{n}(W^u_\epsilon(p))$ *y son subvariedades topológicas inmersas.*

Demostración. Queda como ejercicio. □

E

Definición 4.2.3. Sea f un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico y $\mathbb{R}^n = E^s_p \oplus E^u_p$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p. Decimos que p es:

- *atractor* si $E^s = \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto $E^u = \{0\}$).
- *repulsor* si $E^u = \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto $E^s = \{0\}$).
- *silla* si $\{0\} \neq E^s \neq \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con E^u). En este caso definimos el *índice* de p como $dimE^s$.

Observación 4.2.1. Sea f un difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico.

- Si p es atractor $\Longrightarrow$ $W^s(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^u(p) = \{p\}$.
- Si p es repulsor $\Longrightarrow$ $W^u(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^s(p) = \{p\}$.

4.3. Sistemas de Anosov lineales en $\mathbb{T}^n$.

Consideremos $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, es decir, una matriz con entradas enteras y determinante ± 1. Resulta que A induce un difeomorfismo en el toro $\mathrm{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Definición 4.3.1. Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica. El difeomorfismo inducido $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ definido por

$$f \circ \Pi = \Pi \circ A$$

donde $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ es la proyección canónica es llamado *difeomorfismo de Anosov lineal.*

Teorema 4.3.1. *Sea $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ un difeomorfismo de Anosov lineal. Entonces:*

1. $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = \mathbb{T}^n$.
2. *f es transitivo y topológicamente mixing.*
3. *f es expansivo.*
4. *Para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$, las variedades $W^s(z)$ y $W^u(z)$ son densas en $\mathbb{T}^n$.*

Demostración. Para simplificar y fijar ideas vamos a hacer la prueba en el caso $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por $f \circ \Pi = \Pi \circ A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $q \in \mathbb{Z}$ y consideremos el conjunto $C_q = \{(m/q, n/q) : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Es fácil ver que $A(C_q) = C_q$ y por lo tanto $f(\Pi(C_q)) = \Pi(C_q)$. Sin embargo $\Pi(C_q)$ es un conjunto finito y entonces cada punto de $\Pi(C_q)$ es periódico. Por otro lado $\cup_{q\in\mathbb{Z}} C_q$ es denso en $\mathbb{R}^2$ y así $\cup_{q\in\mathbb{Z}}\Pi(C_q)$ es denso en $\mathbb{T}^2$. Deducimos que $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$ como queríamos.

Como A es hiperbólica de entradas enteras y determinante 1 tenemos que los valores propios λ, μ de A son irracionales y $\lambda = \mu^{-1}$, $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$. En nuestro caso son positivos y $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Además concluimos que E^s y E^u (los subespacios propios asociados a λ y μ respectivamente) son rectas de pendiente irracional. Por lo tanto $\Pi(E^s)$ y $\Pi(E^u)$ son densas en $\mathbb{T}^2$. Sean U, V abiertos cualesquiera en $\mathbb{T}^2$. Luego $\Pi(E^s) \cap U \neq \emptyset$ y $\Pi(E^u) \cap V \neq \emptyset$. Sean $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ componentes conexas de $\Pi^{-1}(U)$ y $\Pi^{-1}(V)$ respectivamente tales que $E^s \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y $E^u \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Se concluye fácilmente que existe n_0 tal que $A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$f^n(U) \cap V \supset \Pi(A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V}) \neq \emptyset, \ \forall n \geq n_0$$

y f es entonces topológicamente mixing.

Veamos que f es expansivo. Consideremos ϵ_0 tal que si $\|x - y\| < \epsilon_0 \Longrightarrow \|Ax - Ay\| < 1/4$ y sean $\tilde{x}, \tilde{y}$ dos puntos de $\mathbb{T}^2$ tal que $dist(f^n(\tilde{x}), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Fijemos $x \in \Pi^{-1}(\tilde{x})$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomemos $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Afirmamos que $y_{n+1} = Ay_n$, $n \in \mathbb{Z}$. En efecto, como $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$ entonces $\|Ay_n - A^{n+1}x\| \leq 1/4$ y como hay un único elemento de $\Pi^{-1}(f^{n+1}(\tilde{y}))$ a distancia $1/4$ de $A^{n+1}x$ concluímos que $Ay_n = y_{n+1}$. Luego $y_n = A^n y_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\|A^n x - A^n y_0\| \leq \epsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Por la expansividad de A deducimos $y_0 = x$ y así $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Por último observamos que dado $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\Pi(x+E^s))$ y $\Pi(x+E^u))$ son densas en $\mathbb{T}^2$. Afirmamos que $W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s)$ y $W^u(\Pi(x)) = \Pi(u + E^s)$. En efecto, si $y \in E^s$ entonces $\|A^n x - A^n y\| \to_{n \to +\infty} 0$ y por lo tanto $dist(f^n(\Pi(x)), f^n(\Pi(y))) \to_{n \to +\infty} 0$ y esto implica $\Pi(x + E^s) \subset W^s(\Pi(x))$ (lo cual ya implica que es densa). Por otro lado, consideremos ϵ_0 como antes y sea $\tilde{y} \in \mathbb{T}^2$ tal que $\tilde{y} \in W^s(\Pi(x))$. Existe n_0 tal que $dist(f^n(\Pi(x)), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0$, $n \geq n_0$. Para simplificar supondremos $n_0 = 0$. Sea $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Se deduce, razonando como anteriormente, que $y_{n+1} = Ay_n$. Pero entonces $\|A^n y_0 - A^n x\| \to_{n \to +\infty} 0$ y luego $y_0 \in x + E^s$. Esto concluye la demostración de $W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s)$. □

Teorema 4.3.2 (Estabilidad estructural de Anosov lineales)**.** *Sea $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ un Anosov lineal. Existe ϵ tal que si $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es un difeomorfismo ϵ-C^1 cerca de f entonces g y f son conjugados.*

Demostración. Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ e hiperbólica tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ A$. Sea $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ difeomorfismo ϵ C^1-cerca de f y sea $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un levantamiento (que es de clase C^1) de g, es decir $g \circ \Pi = \Pi \circ G$. Podemos escribir $G(x) = Ax + p(x)$ donde $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es periódica en $\mathbb{Z}^n$. Resulta que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x)\| < \infty$ y $\|Dp_x\| < \epsilon$.

Por la estabilidad de $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ver Teorema 4.1.1) concluimos que (si ϵ es suficientemente chico) existe $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A \circ H = H \circ G$ donde $H(x)$ es el único punto de $\mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty.$$

Afirmamos que si $q \in \mathbb{Z}^n$ entonces $H(x+q) = H(x) + q$. En efecto, observamos que para cada n, $G^n = A^n + p_n$ donde p_n es periódica en $\mathbb{Z}^n$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x) + q) - G^m(x+q)\| = \\ = \quad & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) + A^m q - A^m(x+q) - p_m(x+q)\| = \\ = \quad & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty \end{aligned}$$

y por unicidad $H(x+q) = H(x) + q$. Por lo tanto podemos definir $h : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ por $h(\Pi(x)) = \Pi(H(x))$. Resulta que h es un homeomorfismo y además:

$$f \circ h \circ \Pi = f \circ \Pi \circ H = \Pi \circ A \circ H = \Pi \circ H \circ G = h \circ \Pi \circ G = h \circ g \circ \Pi$$

es decir, $f \circ h = h \circ g$. □

4.4. Herradura de Smale y puntos homoclínicos

Vamos a considerar un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de un cuadrado $Q = I \times I$ es como se indica en la figura 4.1, conocido como la herradura de Smale ([S]).

Tenemos entonces dos bandas horizontales H_0 y H_1 tal que $f(Q) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1) = I_0 \cup I_1$ son dos bandas verticales. Supondremos que $f_{/H_i}, i = 0, 1$ es afín. En particular, las direcciones horizontales y verticales son preservadas bajo $f_{/H_i}$ y segmentos horizontales son contraídos uniformemente y segmentos verticales son expandidos uniformemente.

Podemos observar que

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap H_0) \cup f(f(Q) \cap H_1)$$

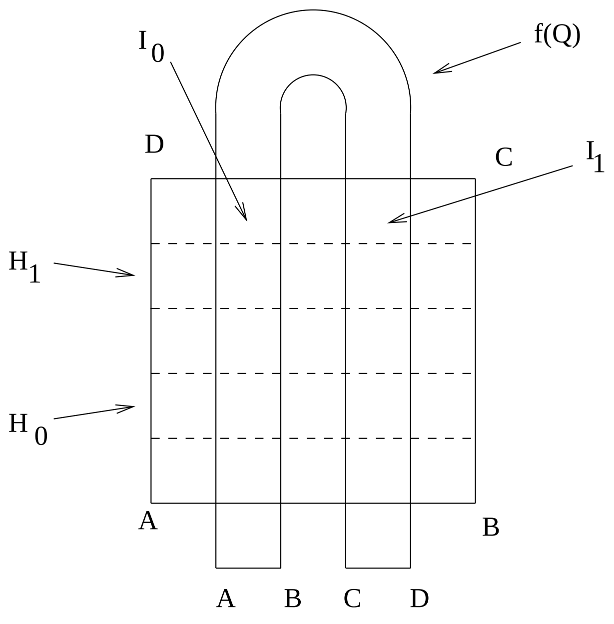

Figura 4.1:

son cuatro fajas verticales. En general

$$\bigcap_{j=0}^{n} f^j(Q)$$

son 2^n fajas verticales y se concluye que

$$\bigcap_{j\geq 0} f^j(Q) = K_1 \times I$$

donde K_1 es un conjunto de Cantor en I, es decir, los puntos de Q cuya órbita pasada siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas verticales.

De la misma forma se prueba que

$$\bigcap_{j\geq 0} f^{-j}(Q) = I \times K_2$$

donde K_2 es un conjunto de Cantor, es decir, los puntos de Q cuya órbita futura siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas horizontales.

Así, el conjunto de puntos de Q cuya órbita siempre se mantiene en Q es $\Lambda = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^j(Q) = K_1 \times K_2$.

Observemos lo siguiente:

- $\bigcap_{j=-m}^{m} f^j(Q)$ consiste en 4^n rectángulos cuyos diámetros convergen a cero con m.
- Sea R_m cualquiera de estos rectángulos. Entonces para cualquier $-m+1 \leq j \leq m-1$ se verifica que $f^j(R_m) \subset I_0$ o $f^j(R_m) \subset I_1$.
- Dados dos puntos $x \neq y$ de Λ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ no están a la vez en I_0 o I_1.

Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift (a la izquierda) de Bernoulli (ver sección 1.4). Consideremos $h : \Lambda \to \Sigma$ de la siguiente manera:

$$h(x)(n) = i \text{ si } f^n(x) \in I_i,\ i = 0,1.$$

Resulta que h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = \sigma \circ h$. En efecto:
h continua: Si x, y pertenecen a un mismo rectángulo de $\bigcap_{j=-m-1}^{m+1} f^j(Q)$ entonces $h(x)(j) = h(y)(j)$, $-m \leq j \leq m$.
h inyectiva: se deduce de lo observado anteriormente
h sobreyectiva: Sea $\{x_n\} \in \Sigma$, entonces

$$R_m = \bigcap_{j=-m}^{j=m} f^{-j}(I_{x_j})$$

es un sucesión encajada de rectángulos cuya intersección consiste en un punto x. Se deduce que $h(x) = \{x_n\}$.

De estas propiedades y el hecho que Λ es compacto concluimos que h es un homeomorfismo. Además:

$$h(f(x))(n) = i \Leftrightarrow f^{n+1} \in I_i \Leftrightarrow i = h(x)(n+1)$$

es decir, $h \circ f = \sigma \circ h$. En conclusión hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sea $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q)$. Entonces Λ es un conjunto de Cantor y $f_{/\Lambda}$ es conjugado al shift $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ donde $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En particular:*

1. *Los puntos periódicos son densos en Λ.*

2. *$f_{/\Lambda}$ es transitivo y topolgicamente mixing.*

3. *$W^s(x) \cap \Lambda$ y $W^u(x) \cap \Lambda$ son densos en Λ para $x \in \Lambda$.*

Observación 4.4.1. Una construcción similar y un resultado análogo puede realizarse en $\mathbb{R}^m$ con un cubo I^m.

Definición 4.4.1. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Un punto $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ diferente de p se llama punto homoclínico. Se dice además que es transversal si la intersección $W^s(p) \cap W^u(p)$ es transversal en x. La órbita de un punto homoclńico (transversal) es llamada órbita homoclínica (transversal).

Situaciones como la herradura vista anteriormente aparecen siempre que tengamos un punto homoclínico transversal:

Teorema 4.4.2 (Birkhoff-Smale)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, p un punto fijo hiperbólico y x un punto homoclínico transversal. Entonces existe $N > 0$ y un conjunto f^N invariante Λ (que contiene p y x) tal que $f^N_{/\Lambda}$ es conjugado al shift de Bernoulli (de dos símbolos).* [1]

4.5. Dinámica hiperbólica

En esta sección enunciaremos (sin demostración) algunos resultados principales de la teoría hiperbólica. El lector interesado podrá consultar por ejemplo [Sh], [KH] y las referencias allí incluidas.

Definición 4.5.1. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Un conjunto compacto e invariante Λ se dice que es hiperbólico si para cada $x \in \Lambda$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_xM$ y $E^u(x) \subset T_xM$ que verifican:

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$.

2. $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

3. Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

   a) $\|Df^n_x v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ $\forall v \in E^s(x)$ y $n \geq 0$.

   b) $\|Df^{-n}_x v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ $\forall v \in E^u(x)$ y $n \geq 0$.

[1] El conjunto Λ es además un conjunto hiperbólico (ver definición 4.5.1).

Como ejemplos básicos de conjuntos hiperbólicos ya vimos los difeomorfismos de Anosov lineales y la herradura de Smale.

Teorema 4.5.1 (Teorema de la variedad estable)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in \Lambda$ se verifica:*

1. *$W^s_\epsilon(x)$ es una subvariedad C^r tal que $T_x W^s_\epsilon(x) = E^s(x)$.*
2. *$W^s_\epsilon(x) \subset W^s(x)$*
3. *$W^s(x) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(f^n(x)))$ y es una subvariedad (inmersa) de clase C^r y varía continuamente (como subvariedades C^r y en subconjuntos compactos) con x.*

Obviamente hay un resultado análogo para W^u ya que $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$.

Definición 4.5.2. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f es:

- *difeomorfismo de Anosov* o *globalmente hiperbólico* si M es conjunto hiperbólico.
- *hiperbólico* si el conjunto límite $L(f)$ es hiperbólico.
- *Axioma A* si el conjunto no errante $\Omega(f)$ es hiperbólico y además $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

Un caso muy particular de difeomorfismos Axioma A son los difeomorfismos Morse-Smale:

Definición 4.5.3. Un difeomorfismo $f : M \to M$ es llamado *Morse-Smale* si

- $\#Per)f) < \infty$ y todos los puntos periódics de f son hiperbólicos.
- $\Omega(f) = Per(f)$.
- $W^s(p)$ y $W^u(q)$ se intersectan transversalmente para cualquier $p, q \in Per(f)$.

Teorema 4.5.2. *Se verifican la siguientes implicaciones:*

- *Anosov $\Longrightarrow$ Axioma A $\Longrightarrow$ hiperbólico.*
- *Axioma A $\Longleftrightarrow$ hiperbólico y $L(f) = \Omega(f)$.*

Teorema 4.5.3 (Descomposición espectral)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo hiperbólico. Entonces $L(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_m$ donde Λ_i, $i = 1, \cdots, m$ son conjuntos compactos, f-invariantes, dos a dos disjuntos y transitivos (llamadas piezas básicas). Además, cada $\Lambda_i, i = 1, ..m$ se descompone a su vez en una union disjunta de conjuntos compactos $\Lambda_i = \Lambda_{i1} \cup \cdots \cup \Lambda_{in_i}$ tal que $f(\Lambda_{ij}) = \Lambda_{i(j+1)}, j = 1, , ..., n_i - 1$, $f(\Lambda_{in_i}) = \Lambda_{i1}$, $f^{n_i}_{/\Lambda_{ij}}$ es topológicamente mixing y $W^s(x)$ es densa en Λ_{ij} $\forall x \in \Lambda_{ij}$.*

Observación 4.5.1. El teorema de Descomposición espectral para Axioma A es debido a Smale, la extensión para difeomorfismos hiperbólicos es debida a Newhouse)

Teorema 4.5.4 (Estabilidad local)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces existe un entorno C^1 de f, $\mathcal{U}(f)$ y un entorno U de Λ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ existe un conjunto $\Lambda_g \subset U$ hiperbólico para g tal que $f_{/\Lambda}$ y $g_{/\Lambda_g}$ son conjugados.*

Antes de enunciar el siguiente teorema precisamos algunas definiciones.

Definición 4.5.4. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo.

- Decimos que f es C^r-*estructuralmente estable* si existe un entorno $\mathcal{U}(f) \subset Diff^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

- Decimos que f es C^r-Ω-*estable* si existe un entorno $\mathcal{U}(f) \subset Diff^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$ tal que $h \circ f_{/\Omega(f)} = g_{/\Omega(g)} \circ h$.

Definición 4.5.5. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Axioma A.

- Decimos que satisface la *condición de transversalidad* si $W^s(x)$ y $W^u(y)$ se intersectan transversalmente para cualquier $x, y \in \Omega(f)$.

- Decimos que f tiene un *ciclo* si existen piezas básicas $\Lambda_{i_1}, \cdots, \Lambda_{i_{k-1}}, \Lambda_{i_k} = \Lambda_{i_1}$ tales que

$$W^u(\Lambda_{i_j}) - \Lambda_{i_j} \bigcap W^s(\Lambda_{i_{j+1}}) - \Lambda_{i_{j+1}} \neq \emptyset, \ 1 \leq j \leq k-1.$$

Teorema 4.5.5 (Estabilidad global)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r. Entonces:*

1. *Si f es Anosov $\Longrightarrow$ f es C^r-estructuralmente estable.*

2. *Si f es Axioma A y satisface la condición de transversalidad $\Longrightarrow$ f es estructuralmente estable*

3. *Si f es Axioma A y no tiene ciclos $\Longrightarrow$ f es C^r Ω-estable.*

Uno de los resultados mas sorprendentes de esta teoría es:

Teorema 4.5.6 (Mañe [M1]). *Sea $f : M \to M$ C^1 estructuralmente estable. Entonces f es Axioma A.*

4.6. Ejercicios

1. Dibujar las trayectorias de un isomorfismo lineal hiperbólico $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ discutiendo seguún los valores propios.

2. Sea $\mathcal{L} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}^n) : A \text{ hiperbólica}\}$. Probar que $\mathcal{L}$ es abierto y denso en $GL_n(\mathbb{R}^n)$.

3. *a*) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hiperbólica con $E^s_A = \mathbb{R}^n$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal con $\|B - A\| < \delta$ entonces A y B son conjugadas. (sug: son localmente conjugadas).

   b) Sean A, B dos transformaciones lineales hiperbólicas en $\mathbb{R}^n$ tales que $E^s_A = E^s_B = \mathbb{R}^n$. Probar que A y B son conjugadas sii $\det(A) = \det(B)$. (Sug: $\{A \in GL_n \text{ hiperbólica}\}$ tiene solamente dos componentes arcoconexas.)

   c) Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente para que dos transformaciones lineales hiperbólicas de $\mathbb{R}^n$ sean conjugadas.

4. *a*) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Probar que A es hiperbólica sii $\omega(x) = 0$ o $\omega(x) = \emptyset$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

   b) Dar un ejemplo de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que tenga una orbita recurrente no periódica.

5. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo estructuralmente estable y p un punto fijo de f. Probar que p tiene que ser hiperbólico.

6. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Probar que dado $N > 0$ existe un entorno $V(p)$ tal que si $q \in V$ es un punto periódico distinto de p entonces su período es mayor que N.

7. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo (periódico de periódo k) hiperbólico de f. Mostrar que existen $\mathcal{U}(f)$ entorno de f y $U(p)$ entorno de p tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces g tiene un único punto fijo (periódico de periódo k) y que es hiperbólico en $U(p)$. (sug: considerar $F(g, x) = g(x) - x$ en una carta local).

8. Sea f difeomorfismo C^r tal que $\Omega(f)$ consiste de una cantidad finita de órbitas periódicas hiperbólicas y supongamos que existe una función $V : M \to \mathbb{R}$ tal que $V(f(x)) \leq V(x)$ para todo $x \in M$ y que $V(f(x)) = f(x)$ sii x es periódico. Probar que bajo estas condiciones f es Ω-estable.

9. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico tal que $E^u(x) = \{0\}$ $\forall x \in \Lambda$. Probar que Λ consiste un número finito de órbitas periódicas atractoras.

10. Sea M una variedad compacta y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{r+1}, $r \geq 1$. Considere el campo $X = grad(f)$ que es de clase C^r y sea ϕ_t su flujo.

    a) Mostrar que $f(\phi_t))$ es creciente con t. Concluir que ϕ_t no tiene órbitas periódicas. ¿Quién es $\Omega(X)$?

    b) Probar que p es una singularidad sii p es un punto crítico de f. Probar que p es una singularidad hiperbólica sii el hessiano de f en p es no degenerado. Probar que p es un atractor (repulsor) sii p es un máximo (mínimo) local de f. (Una singularidad p es hiperbólica si DX_p no tiene valores propios con parte real nula.)

    c) Decimos que f es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados. Probar que si f es de Morse entonces X es Ω-

estable (es decir, si Y es un campo C^r cerca de X entonces existe $h : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ homeomorfismo tal que $h(\mathcal{O}_X(x)) = \mathcal{O}_Y(h(x))$.)

d) Concluir que el subconjunto de $X^r_{grad}(M)$ (campos gradientes en M de clase C^r) que son Ω-estables es abierto y denso en X^r_{grad}. Sug: use el teorema de Morse, que dice que el conjunto de funciones de Morse es abierto y denso en $C^{r+1}(M; \mathbb{R})$.

Bibliografía

[D] Denjoy, A; Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. de Math. Pures et Appliquées (9 série),* **11** (1932) 333-375.

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[KH] Katok, A.,Hasselblatt, B.; *Intoduction to the modern theory of Dynamical Systems* Cambridge Univ. Press, 1995.

[M1] R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **66** (1988) 161-210.

[M2] R. Mañé, An ergodic clossing lemma, Ann. of Math. **116** (1982), 503-540.

[N] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101-151.

[NS] Nemytskii, V.; Stepanov, V.; *Qualitative Theory of differential equations*, Princeton University Press, 1960.

[P] J. Palis, A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors, *Astérisque* **261** (2000), 339-351.

[Pl] V. A. Pliss, On a conjecture due to Smale, *Diff. Uravnenija*, **8** (1972), 268-282.

[PS1] E. R. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of math* **151** (2000), 961-1023.

[PS2] E. R. Pujals, M. Sambarino, On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits and variation of entropy, *Nonlinearity* **13** (2000) 921-926.

[PT] J. Palis, F. Takens, Hyperoblicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Univ. Press*, 1993.

[Pu1] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math.* **89** (1967) 956-1009.

[Pu2] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010-1021.

[S] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.

[Sch] A. J. Schwartz, A generalization of a Poincaré-Bendixon Theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 453-458.

[Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag*, 1987.