



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Opciones Financieras sobre Bonos

Una aplicación para el Mercado Uruguayo

Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática

Montevideo, Uruguay
2015

Autor: Guillermo Magnou
Director de Tesis: Dr. Ernesto Mordecki

Resumen

El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología para el mercado uruguayo, que permita valorar opciones financieras sobre bonos soberanos que sirvan como cobertura para las fluctuaciones del mercado uruguayo. Para lograr dicho cometido en primer lugar, se mostrará la relación entre la tasa instantánea y los precios de los Bonos. De esta relación concluimos que, si la dinámica de la tasa instantánea se comporta como una ecuación diferencial estocástica, entonces con cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} se puede construir una familia de precios de bonos libres de arbitraje. A continuación se presenta el modelo Black-Derman-Toy (BDT) el cual es utilizado para determinar la tasa instantánea, dicho modelo es de un factor y de no arbitraje. El modelo asume que la tasa instantánea se distribuye lognormal, y debido a esto no existen soluciones analíticas y se requieren procedimientos numéricos. Es por esta razón que calibramos árboles binomiales sobre la tasa instantánea de forma que se ajuste a la curva de rendimiento del observada, del 30 de Setiembre de 2014. Por último, se presentan los resultados obtenidos para tres bonos de referencia, cada uno nominado en distinta moneda (pesos, unidades indexadas y dólares). Dichos resultados incluyen los precios de las primas para opciones financieras CALL y PUT sobre los precios de los bonos para opciones tipo europeas y americanas utilizando distintos precios pactados.

Palabras Claves: Valuación de Opciones, Tasa instantánea, Modelo Black-Derman-Toy, Árbol binomial, Deuda Soberana.

Índice general

1. Introducción	1
Mercado de Valores en Uruguay	1
Motivación	2
Mercado de Derivados	4
Objetivos	5
2. Definiciones Básicas	7
Arbitraje	7
Activos Financieros	7
3. Ajuste de la Curva de Rendimiento	17
Método Nelson-Siegel	17
Método Svensson	19
Ajuste de los parámetros	20
Técnicas Alternativas	21
Volatilidad de la Curva de Rendimientos	21
4. Fundamentos Matemáticos	23
Modelo Estándar de Mercado y Arbitraje	23
Modelo estocástico del precio del bono	26
5. Árbol Binomial	29
Construcción de un Árbol Binomial libre de arbitraje	29
Precios de bonos a partir del Árbol Binomial	30
Opciones sobre Bonos a partir del Árbol Binomial	33
Ecuaciones Forward	34
6. Modelo para la tasa instantánea $r(t)$	37
Modelo Black-Derman-Toy	37
7. Aplicación para el Mercado Uruguayo	44
Mercado Uruguayo	44
Expectativas de Mercado	47
Input del modelo	48
Resultados	51
8. Conclusiones	56
A. Código	60

Índice de figuras

1.1.	Comparativo de la curva CUI de BEVSA entre 31/05 y 30/08.	3
1.2.	Rendimiento Mensual en Pesos de las AFAP en 2013.	3
1.3.	Evolución del Precio del Bono BEUI 30.	4
2.1.	Flujo de inversión en un Bono Cupón Cero.	8
2.2.	Esquema de equivalencia de tasas.	8
2.3.	Flujo de inversión en un Bono con Cupón.	9
2.4.	Distintas formas de ETTI.	11
2.5.	Resultado de una opción CALL y PUT al vencimiento.	12
2.6.	Estrategia Spread.	13
2.7.	Estrategias Túnel.	14
2.8.	Estrategias Straddles.	14
2.9.	Estrategias Strangles.	15
2.10.	Estrategias Butterfly.	16
2.11.	Estrategias Back Spead.	16
3.1.	Ejemplo de Curva parametrizada con Nelson-Siegel.	18
3.2.	Ejemplo de Curva parametrizada con Svensson.	20
5.1.	Construcción del árbol binomial libre de arbitraje.	29
5.2.	Árbol Binomial para la tasa instantánea $r(t)$	30
5.3.	Precio de un Bono Cupón Cero con vencimiento en $t = 4$	32
5.4.	Precio de un Bono Cupón 7% con vencimiento en $t = 6$	32
5.5.	Flujo de inversión en un Bono con Cupón 7% con vencimiento en $t = 6$	33
5.6.	Precio de una Opción CALL Europea.	34
5.7.	Precio de una Opción PUT Americana.	34
5.8.	Árbol Binomial para los precios elementales.	35
6.1.	Construcción del árbol binomial para modelo BDT.	39
6.2.	Construcción del árbol binomial para $P(1, 1, n)$ y $P(1, -1, n)$	40
7.1.	Perfil de la deuda según vencimiento y moneda	44
7.2.	Evolución de la Deuda últimos 10 años	45
7.3.	Curva UI BVM-CPA para el 30 de Setiembre 2014	46
7.4.	Curvas CUI, CUD, ITLUP para el 30 de Setiembre 2014	47
7.5.	Ajuste de las Curvas de Rendimiento para el 30 de Setiembre 2014	49
7.6.	Ajuste de las Curvas de Rendimiento para la serie histórica	49
7.7.	Estimación de las Curvas de Volatilidad para el 30 de Setiembre 2014	50
7.8.	Ajuste de $U(n)$ y $\sigma(n)$ para el Bono N.T.\$-S5 nominado en Pesos.	51
7.9.	Resultado de inversión de una Opción CALL Europea	52
7.10.	Resultado de estrategias para el bono en pesos	53
7.11.	Resultado de estrategias para el bono en dólares	54
7.12.	Resultado de estrategias para el bono en unidades indexadas	55

Introducción

En este capítulo describimos el mercado de valores en Uruguay y las distintas bolsas de valores registradas para operar, posteriormente presentaremos los movimientos que ocurrieron en el mercado durante 2013 que motivaron este trabajo. Por último, presentaremos el mercado de derivados como alternativa para la elaboración de instrumentos de cobertura y terminamos con los objetivos de este trabajo y la estructura del mismo.

Mercado de Valores en Uruguay

En Uruguay, las Bolsas de Valores están reguladas y supervisadas por el Banco Central del Uruguay (BCU) a partir de la ley N° 18.627 (Ley de Mercado de Valores).

De acuerdo a la ley, las Bolsas de Valores son entidades que tienen por objeto proveer a sus miembros los medios necesarios para que puedan realizar eficazmente las transacciones de valores mediante mecanismos de subasta pública. Y también para que puedan efectuar las demás actividades de intermediación de valores que procedan de acuerdo con la ley y con la reglamentación que dicte la Superintendencia de Servicios Financieros del Banco Central del Uruguay (BCU).

La norma establece que las Bolsas de Valores requerirán para funcionar autorización previa de la Superintendencia de Servicios Financieros. Las Bolsas de Valores deben reglamentar su actividad, vigilando el estricto cumplimiento de dichos reglamentos, de manera de asegurar la existencia de un mercado competitivo, ordenado y transparente, sin perjuicio de las facultades de regulación de la Superintendencia de Servicios Financieros. Además deben velar por el estricto cumplimiento por parte de sus miembros de los más elevados principios éticos y de todas las disposiciones legales y reglamentarias que les sean aplicables.

Actualmente cuentan con la autorización de la Superintendencia de Servicios Financieros la Bolsa de Valores de Montevideo (BVM), y la Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay (BEVSA). Según los datos publicados por el BCU, el circulante de oferta pública para Setiembre de 2014 era apenas superior a los 30,000 millones de dólares y en dicho mes la operativa de valores de oferta pública alcanzo los 2,941,92 millones de dólares siendo la misma un poco menos que el 10 % del circulante. Prácticamente el 80 % de la operativa fue a través del mercado primario y el restante 20 % fue en el mercado secundario, diferenciando por bolsa encontramos que el 72 % de la operativa fue por BEVSA, el 2 % en BVM y el 26 % restante opero fuera de la bolsa. Se observa que solamente 5,7 millones de dólares se operaron en instrumentos de cobertura mediante forward de divisas en BEVSA.

A continuación se presenta una breve descripción de las bolsas de valores.

BVM

La Bolsa de Valores de Montevideo tiene su origen en el siglo XIX, cuando se creó la Sociedad Bolsa Montevideana en 1867. Su principal objetivo era dotar al comercio de plaza un punto de reunión a una hora fija, para tratar los negocios de la época. Simultáneamente, se crearon

dos cuerpos empresariales: la Cámara Sindical, que representaba los intereses del comercio, y la Comisión Interna de Corredores, que regulaba la actividad de los mismos. En 1921 la Comisión de Corredores pasó a constituirse como asociación civil sin fines de lucro, la cual funcionó como ámbito de transacciones bursátiles así como gremio de los corredores. En 1952 esta comisión pasó a llamarse Bolsa de Valores. En 1997 la Bolsa de Valores se separó de la Bolsa de Comercio y en 2004 adoptó la denominación actual de Bolsa de Valores de Montevideo.

La Bolsa de Valores de Montevideo (BVM) es una institución cuya principal función es brindar la plataforma necesaria para la realización de los procesos de colocación, negociación y custodia de valores públicos y privados.

El proceso de colocación comprende el ingreso de nuevos valores al mercado, es decir, la emisión primaria de valores. La negociación implica la compra-venta de valores preexistentes en el mercado secundario. La custodia de valores es un servicio que le brinda respaldo y seguridad a los inversores en materia de administración y comercialización de sus valores, reduciendo los riesgos de pérdida, robo o falsificación.

BEVSA

La Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay S.A. (BEVSA) fue constituida el 15 de enero de 1993 por 26 instituciones financieras públicas y privadas de plaza para lograr un mercado de capitales (cambios, dinero y valores) transparente, profesional y con igualdad de oportunidades para todos los actores, acorde con la tradición histórica del sector financiero del país, que sea la base para el desarrollo de una nueva opción de financiamiento para el sector productivo canalizando eficientemente el ahorro interno.

BEVSA fue inscripta como Bolsa de Valores en el Banco Central del Uruguay el 9 de agosto de 1994, y comenzó sus operaciones el 5 de setiembre de ese año.

Motivación

A mediados del año 2013 la curva de rendimiento de los instrumentos emitidos por el Banco Central del Uruguay (BCU) en Unidades Indexadas (UI) aumentó provocando una importante caída de precios, como se aprecia en la figura siguiente el movimiento del rendimiento para el plazo de 10 años fue superior a 2%.

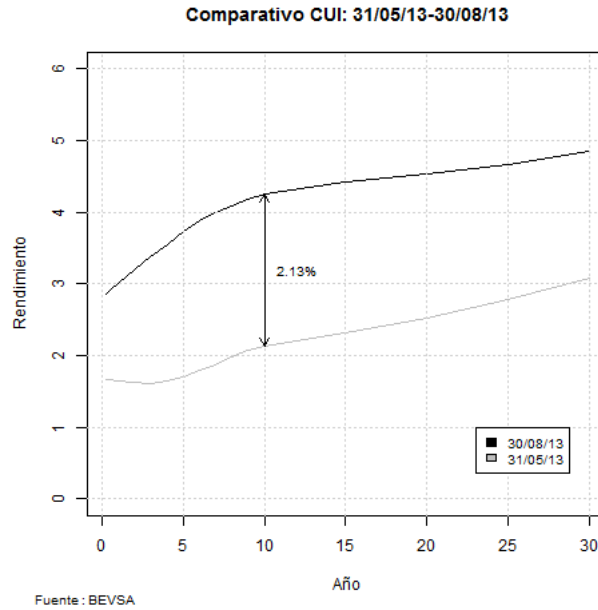


Figura 1.1: Comparativo de la curva CUI de BEVSA entre 31/05 y 30/08.

Este movimiento en la curva provocó grandes pérdidas en inversores institucionales como por ejemplo las Administradoras de Fondos de Ahorro Previsional (AFAP), que en un plazo de 3 meses registraron una disminución en los activos del Fondo Ahorro Previsional de más de 10.000 millones de pesos (un 5% del portafolio). El siguiente gráfico muestra la rentabilidad promedio mensual de las AFAP medidas en pesos para el año 2013:

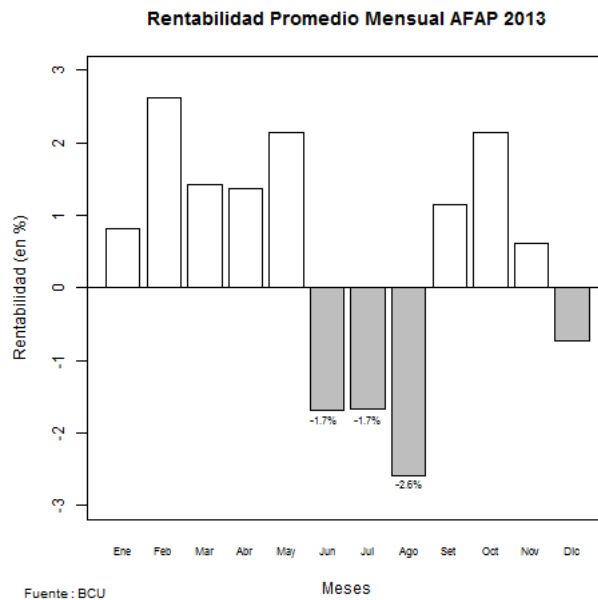


Figura 1.2: Rendimiento Mensual en Pesos de las AFAP en 2013.

Esta pérdida se explica en gran parte por la concentración del portafolio que tienen las AFAP en activos del Estado. En el cierre de Mayo de 2013 el 73,91% del portafolio se encontraba

invertido en estos activos. En particular, en el cierre de Mayo de 2013 el 10,81 % del portafolio se encontraba invertido en un bono con vencimiento en 2030 (*EUYBE300710R*) cuyo valor de referencia era 122,13, en el cierre de Agosto el precio de referencia de dicho bono descendió a 94,29.

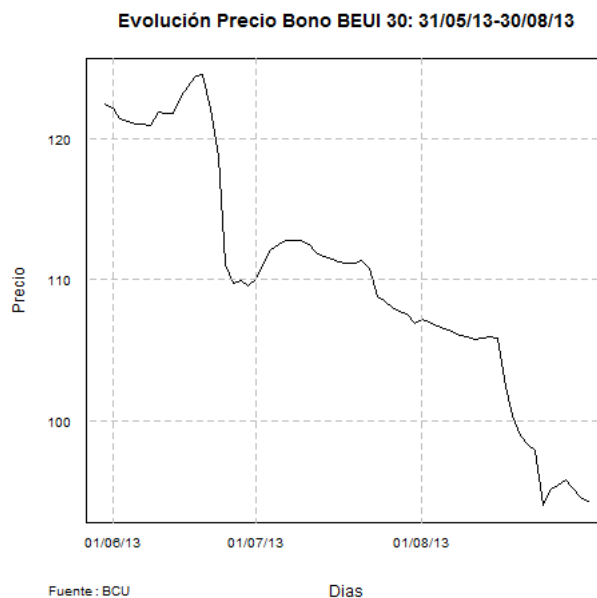


Figura 1.3: Evolución del Precio del Bono BEUI 30.

Este tipo de movimientos en la curva provocan volatilidades en los portafolios de inversión en áreas sensibles como la seguridad social, por lo cual entendemos necesario profundizar el mercado uruguayo y desarrollar metodologías que permitan valorar instrumentos derivados que sirvan de cobertura de riesgos. En este trabajo se utilizó las opciones sobre precios de los bonos como instrumentos de cobertura. Hay que destacar que los portafolios de las AFAP tienen permitido por normativa invertir en instrumentos de cobertura pero no existe un mercado local desarrollado para el mismo.

Mercado de Derivados

En finanzas, un derivado es un activo financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo. El activo del que depende toma el nombre de activo subyacente, y el mismo puede ser una acción, índice bursátil, valores de renta fija, tasa de interés, materias primas por citar algunos ejemplos. Los derivados pueden ser utilizados para una serie de propósitos, incluyendo cobertura contra movimientos adversos en los precios, la especulación frente a movimientos en los precios o conseguir acceso a otro tipo de activos o mercados. Algunos de los derivados más comunes son los forwards, futuros, opciones, swaps, y variaciones de los mismos. La mayoría de los derivados se negocian over-the-counter (fuera de la bolsa) o en una bolsa como la Chicago Mercantile Exchange.

Mientras que la comercialización de derivados ha crecido enormemente en estos años, existe evidencia de que estos instrumentos han sido utilizados desde la antigua Grecia donde Aristóteles cuenta en su libro “Política” como Thales de Mileto realizó ganancias mediante un acuerdo

de opciones alrededor del siglo VI a.C.. De acuerdo con la historia, Thales pronosticó que la cosecha de aceitunas sería muy fructífera para el siguiente año. Debido a que nadie se atrevió a hacer un pronóstico del tiempo, Thales fijó el precio de las aceitunas a un valor muy bajo haciendo un pequeño depósito de dinero en relación con el tamaño de la posible cosecha. De tal manera que si el precio era menor al que Thales fijo perdería todo su depósito, pero si el precio de la aceituna era superior al fijado hacía que Thales tuviera el derecho pero no la obligación de comprar al precio bajo que había fijado. Tal como lo pronosticó, la cosecha fue bastante buena y la demanda por el producto hizo que subiera su precio, generando una ganancia para él.

El primer registro de un mercado de futuros formal viene del siglo XVII d.C. en Japón, donde los dueños feudales japoneses enviaban arroz a sus almacenes en las ciudades más importantes y después emitían tickets que otorgaban el derecho para la entrega posterior del arroz a un precio fijo establecido al momento de la entrega del producto. También surgió algo similar en Estados Unidos fundamentalmente con los cereales, debido a que la cosecha se producía en un mes determinado (julio), cuando la cosecha era buena se inundaban los silos y bajando los precios del cereal. Por el contrario, en épocas en que la cosecha era mala, los precios eran altos. Para evitar esta incertidumbre en el precio del cereal, tanto productores agrícolas como industriales empezaron a negociar el precio por anticipado y también se pusieron de acuerdo a entregar la mercancía en una fecha previamente fijada (cobertura de riesgos).

Los derivados (tal como los conocemos hoy en día) tuvieron un auge en la década de los setenta, con la creación de la Chicago Board Options Exchange (CBOE) y la publicación en 1973 del modelo de valoración de Black-Scholes-Merton. Robert Merton y Myron Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997 por su trabajo. Aunque no elegible para el premio debido a su muerte en 1995, Fisher Black fue mencionado como un colaborador.

La disponibilidad de una buena estimación del valor teórico contribuyó al desarrollo del mercado de opciones. Estos avances en modelos financieros establecieron un marco matemático que sirvió como base para otros modelos de valoración de opciones, para otros mercados y situaciones usando argumentos, suposiciones y herramientas parecidos, como el modelo de Black para opciones sobre futuros, el método de Montecarlo o el modelo binomial.

Objetivos

El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología que permita valorar instrumentos derivados sobre la renta fija, en particular se propone una metodología para la valuación de opciones financieras sobre bonos soberanos que sirvan como cobertura para las fluctuaciones del mercado uruguayo. El modelo que se utiliza para determinar la tasa de interés instantánea es el Black-Derman-Toy (BDT), a esta clase de modelos se los denominan de un factor dado que solo tiene una fuente de incertidumbre. La preferencia de este modelo sobre los restantes modelos de un factor, radica en que el modelo BDT pertenece a la clase de modelos que se ajustan a la curva de rendimientos observada, es decir, la curva de rendimientos es un input del modelo, y supone que la distribución de la tasa instantánea es lognormal, por lo que no nos preocuparemos por eventuales tasas negativas.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera, luego de esta introducción presentaremos algunas definiciones básicas, como ser arbitraje y distintos activos financieros. Definiremos modelos matemáticos para cuentas bancarias, bonos y opciones y sus principales características. Posteriormente profundizaremos en el ajuste de la curva de rendimientos la cual nos permitirá definir los input de nuestro modelo, dentro de este capítulo repasaremos los modelos de Nelson-

Siegel y Svensson y finalizaremos el capítulo con una breve descripción de la volatilidad de la curva de rendimiento.

En el capítulo 4 describiremos los fundamentos matemáticos que nos permitirán relacionar los precios de los bonos con la tasa instantánea en un espacio de probabilidad libre de arbitraje. Luego presentaremos los modelos binomiales para la tasa instantánea o mejor conocidos como árboles binomiales de la tasa de interés instantánea, esta técnica la utilizaremos en la práctica como aproximación a los modelos de tiempo continuo. En el capítulo 6 introducimos distintos modelos de un solo factor para la tasa instantánea, los cuales parten de una ecuación diferencial estocástica. Luego profundizaremos en el modelo BDT en el cual expresamos los supuestos y la forma de la tasa instantánea bajo las hipótesis del modelo y finalizamos el capítulo con las instrucciones de cómo se calibra el modelo.

En el capítulo 7 se presentarán las principales características del mercado uruguayo, incluyendo una descripción de la deuda y de las curvas de rendimiento, posteriormente se realizará una mención sobre las expectativas de mercado y las estrategias de inversión. Luego detallaremos las curvas de rendimientos que servirán como input para la calibración del modelo BDT y los bonos de referencia que utilizaremos para determinar los precios de las opciones financieras.

Finalizaremos el capítulo con los resultados obtenidos para cada uno de los bonos de referencia, dichos resultados incluirán los precios de las primas para opciones financieras CALL y PUT para opciones tipo europeas y americanas utilizando distintos precios pactados (precio strike). En el capítulo 8 describiremos las conclusiones encontradas en el trabajo y brindaremos algunas eventuales extensiones que se podrían realizar.

Definiciones Básicas

En este capítulo se definen algunos conceptos básicos de la modelación matemática en finanzas que se utilizarán durante el resto del trabajo. En primer lugar, introducimos el concepto de arbitraje, posteriormente definiremos los activos financieros. Dentro de los activos financieros mencionaremos los bonos y especificaremos su relación con la tasa de interés. Por último, describimos las opciones financieras que se utilizarán como instrumento de cobertura frente a los cambios en los precios de los bonos.

Arbitraje

Decimos que existe arbitraje cuando es posible diseñar una estrategia de inversión que garantiza un rendimiento positivo, sin importar los acontecimientos.

Con estrategia de inversión nos referimos a la estrategia utilizada por el inversor para seleccionar los activos financieros que componen el portafolio de inversión.

El arbitraje es posible cuando al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

- El precio de un mismo activo difiere en distintos mercados.
- Dos activos que producen el mismo flujo de efectivo no se comercializan al mismo precio.
- Un activo con un precio conocido en el futuro no se vende hoy a su precio futuro descontado a la tasa de interés libre de riesgo.

El arbitraje tiene el efecto de hacer que los precios de los mismos activos en mercados diferentes converjan. La velocidad con que los precios convergen es una medida de la eficiencia del mercado. Durante todo el trabajo supondremos que el mercado es eficiente por lo tanto no existen oportunidades de arbitraje. En el capítulo 4 retomaremos el concepto de arbitraje.

Activos Financieros

Un activo financiero es un instrumento que canaliza el ahorro hacia la inversión, se materializa en un contrato realizado entre dos partes. Por un lado el comprador que recibe el nombre de inversor, y por otro lado, el vendedor recibe el nombre de emisor.

Existe una gran cantidad de activos financieros en los que un inversionista puede estar interesado, desde activos básicos como las cuentas bancarias hasta activos complicados como las opciones financieras, a esta variedad la podemos clasificar en activos de renta fija (por ejemplo, cuentas bancarias, bonos) y renta variable (por ejemplo acciones, opciones financieras).

A continuación, se describen los activos financieros y sus componentes que se utilizarán en este trabajo.

Bonos Cupón Cero, Bonos con Cupón y Cuenta Bancaria

Los bonos son uno de los instrumentos que los gobiernos y las empresas utilizan para financiar sus actividades, mediante la emisión de deuda, que a diferencia de las acciones, no implican la compra de una empresa por parte del inversor. Básicamente, el comprador de un bono presta dinero al emisor, por cierto período de tiempo (hasta el vencimiento del bono). El emisor se compromete a devolver el valor nominal del bono (suponemos igual a \$1) junto con los intereses, llamados cupones. Los bonos más comunes, pagan cupones fijos y el valor del mismo se expresa como un porcentaje del valor nominal, los cupones se suelen pagar anualmente o semestralmente. Hay otra clase de bonos, que solo promete el pago de su valor nominal al vencimiento, estos se llaman bonos de cupón cero o a descuento.

Bono Cupón Cero

El precio de un bono cupón cero en tiempo t con vencimiento en T lo denotamos como $P(t, T)$.



Figura 2.1: Flujo de inversión en un Bono Cupón Cero.

Es claro que al momento del vencimiento el valor del precio del bono debe ser igual que el valor nominal, es decir, $P(t, t) = 1 \forall t$. La relación entre el precio del bono cupón cero y el valor nominal (el cual suponemos que es 1) es lo que determina la tasa de interés $r(t, T)$ (también conocida como tasa spot), la cual es de la forma

$$P(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)}. \quad (2.1)$$

La estructura temporal de tasas de interés en tiempo t es la función de la tasa de interés para los distintos vencimientos T . La tasa forward $f(t, T, S)$ con $t < T < S$ representa los intereses esperados entre dos fechas en el futuro. Las tasas forward se calculan a partir de las tasas de interés utilizando la condición de no arbitraje, que sostiene que una inversión que gana interés de $r(t, T)$ desde t hasta T y se reinvierten a una tasa de interés $f(t, T, S)$ durante el resto del período hasta el tiempo S , deben tener el mismo valor al final que una inversión del mismo monto que gana intereses de $r(t, S)$ hasta el tiempo S .

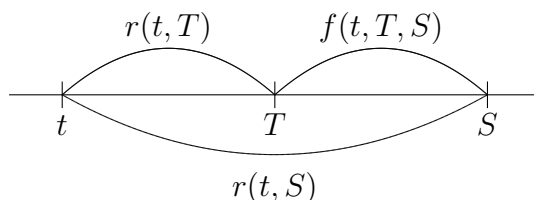


Figura 2.2: Esquema de equivalencia de tasas.

Matemáticamente,

$$e^{r(t, T)(T-t)} e^{f(t, T, S)(S-T)} = e^{r(t, S)(S-t)}$$

Despejando $f(t, T, S)$ obtenemos una expresión analítica para la tasa forward

$$f(t, T, S) = \frac{r(t, S)(S-t) - r(t, T)(T-t)}{S-T}.$$

La tasa forward instantánea describe el interés de una inversión por un período infinitesimal después de T ,

$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T).$$

La curva forward en tiempo t es la función de la tasa forward instantánea para los T distintos vencimientos. Puede observarse que la relación entre la tasa de interés $r(t, T)$ y la tasa forward instantánea es la siguiente

$$r(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, x) dx.$$

De esta manera tenemos otra forma alternativa de obtener el precio de un bono cupón cero a partir de la tasa forward instantánea

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, x) dx}.$$

Definimos la tasa de interés instantánea (short rate) en tiempo t como $r(t) := f(t, t)$. En el capítulo 4, utilizando argumentos de no arbitraje se demuestra que, bajo ciertos supuestos, si modelamos la tasa $r(t)$ como un proceso estocástico, bajo una medida neutral de riesgo \mathbb{Q} , el precio de un bono cupón cero es

$$P(t, T) = E_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(x) dx} | \mathcal{F}_t].$$

Bono con Cupón

El precio de un bono con cupón en tiempo t cuyo flujo de pagos es el vector $c = [c_1, \dots, c_{j-1}, c_j]$ (donde c_j incluye el valor nominal del bono) y las fechas de pago son $T = [T_1, \dots, T_{j-1}, T_j]$ lo denotamos como $P(t, T, c)$.

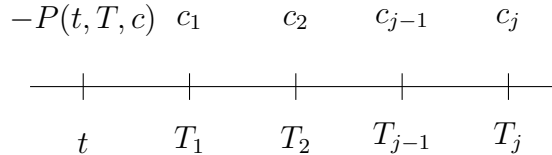


Figura 2.3: Flujo de inversión en un Bono con Cupón.

La relación entre el precio del bono con cupón y el flujo de pagos es lo que determina la tasa de rendimiento al vencimiento (yield to maturity) y_t^c , la cual verifica la ecuación

$$P(t, T, c) = \sum_{i=0}^j c_i e^{-y_t^c (T_i - t)}. \quad (2.2)$$

Utilizando la condición de no arbitraje podemos obtener una relación entre los precios de los bonos con cupón y los precios de los bonos cupón cero. La condición de no arbitraje nos dice que si compramos j bonos cupón cero cuyos vencimientos son T_1, \dots, T_{j-1}, T_j y valor nominal c_1, \dots, c_{j-1}, c_j el precio que pagamos tiene que coincidir con un bono con cupón con idéntico flujo de pagos y vencimientos, por lo tanto encontramos una expresión alternativa para (2.2) a partir de (2.1)

$$P(t, T, c) = \sum_{i=0}^j c_i e^{-r(t, T_i)(T_i - t)}. \quad (2.3)$$

O lo que es equivalente a

$$P(t, T, c) = \sum_{i=0}^j c_i e^{-\int_t^{T_i} f(t,x) dx}.$$

En definitiva si conocemos la estructura funcional de la tasa de interés $r(t, T)$ en tiempo t podemos obtener el precio de cualquier bono.

Cuenta Bancaria

La ganancia de un peso invertido hoy ($t = 0$) sobre un período $0, \Delta t$ esta dado por

$$\frac{1}{P(0, \Delta t)} = e^{\int_0^{\Delta t} f(0,x) dx} = 1 + r(0)\Delta t + o(\Delta t).$$

El cual reinvertimos instantáneamente obteniendo

$$\frac{1}{P(0, \Delta t)} \frac{1}{P(\Delta t, 2\Delta t)} = (1 + r(0)\Delta t) (1 + r(\Delta t)\Delta t) + o(\Delta t).$$

Esta estrategia de reinvertir en bonos con vencimientos en Δt conduce a lo que llamaremos Cuenta Bancaria $B(t)$. $B(t)$ representa una inversión libre de riesgo, donde la ganancia es acumulada continuamente a una tasa libre de riesgo ($r(t)$) que prevalece en el mercado en cada instante.

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t) + o(\Delta t).$$

Para $\Delta t \rightarrow 0$ la cuenta bancaria converge a

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

y si definimos $B(0) = 1$ obtenemos

$$B(t) = e^{\int_0^t r(x) dx}.$$

La Cuenta Bancaria es importante para relacionar cantidades de dinero en distintos momentos. Para tener \$1 en la cuenta bancaria en tiempo T necesitamos tener

$$\frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_t^T r(x) dx},$$

en la cuenta bancaria en tiempo $t \leq T$.

En muchas aplicaciones, especialmente cuando aplicamos la formula de Black-Sholes, se acostumbra a que $r(t)$ sea una función determinista del tiempo, obteniendo que la cuenta bancaria sea un función determinista. Sin embargo, cuando el cometido es valuar derivados de tasas de interés, es necesario comenzar a modelar la evolución de $r(t)$ a través de un proceso estocástico.

Estructura de las Tasas de Interés

La estructura temporal de las tasas de interés (ETTI), también denominada curva de rendimiento, representa la relación funcional existente, en un momento dado del tiempo, entre el la tasa de interés y el tiempo que resta hasta su vencimiento. Una curva de rendimiento no permanece estable sino que puede cambiar con el paso del tiempo, adoptando diferentes formas. Las principales formas que toman las curvas se muestran en la siguiente figura y corresponden a las siguientes: pendiente positiva, pendiente negativa, joroba y plana.

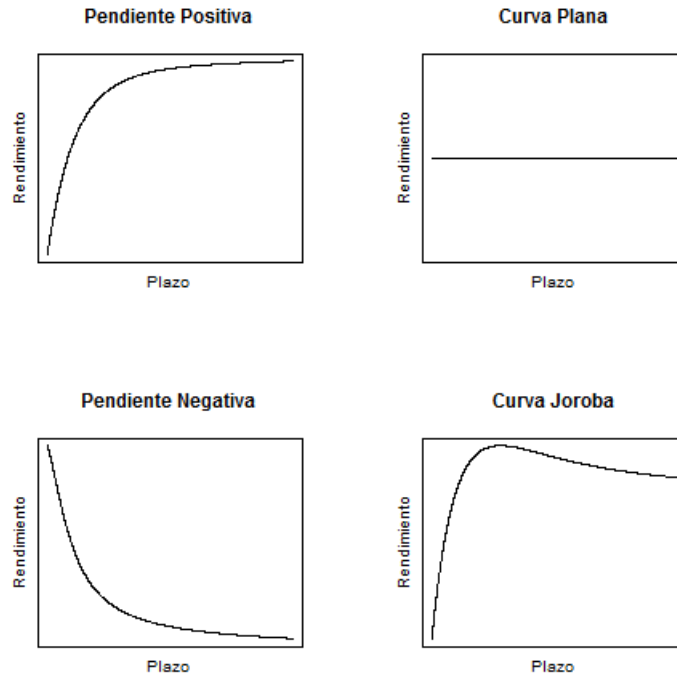


Figura 2.4: Distintas formas de ETTI.

La curva de rendimientos es importante para el análisis macroeconómico porque afecta las decisiones de consumo e inversión de los agentes económicos, y por lo tanto la demanda agregada, que es uno de los determinantes de la inflación en la economía.

Al mismo tiempo la curva de rendimiento permite extraer información sobre expectativas de mercado de diversas variables macroeconómicas, llámese tasas de interés futuras, tasas de inflación, tasas de depreciación, entre otras.

Desde el punto de vista financiero, la existencia de una curva de rendimientos favorece el desarrollo del mercado de capitales doméstico, tanto el mercado primario como el mercado secundario, al permitir la valuación de los instrumentos financieros (de deuda y derivados).

En el próximo capítulo profundizaremos en el ajuste de la curva de rendimiento donde presentaremos distintos modelos utilizados en la práctica.

Opciones Financieras

Una Opción Financiera es un contrato a través del cual, el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar (CALL) o vender (PUT) un activo a un precio pactado (K) en una fecha futura (T).

Existen dos grandes grupos de opciones: las americanas y las europeas. Una opción europea solo puede ser ejecutada en la fecha de vencimiento, en cambio, una opción americana puede ser ejecutada en cualquier momento antes de su vencimiento.

El comprador de una opción CALL europea paga una prima (C_t), en tiempo t , para obtener el derecho a comprar, en tiempo T (siendo $t < T$), el bono a un precio K . Al vencimiento de la opción (tiempo T), el comprador recibirá $\max\{P(T, T^*) - K, 0\}$ ya que si $P(T, T^*) > K$ se ejerce la opción, es decir, se compra el bono a precio K y luego se vende en el mercado a $P(T, T^*)$, lo que da un resultado de $P(T, T^*) - K$. En otro caso la opción no se ejerce, dado que es

mejor comprar el activo directamente en el mercado y el resultado es 0. Análogamente el pago en tiempo T al comprador de una opción PUT europea cuya prima es P_t es $\max\{K - P(T, T^*), 0\}$, el siguiente gráfico resume los posibles resultados de adquirir una opción.

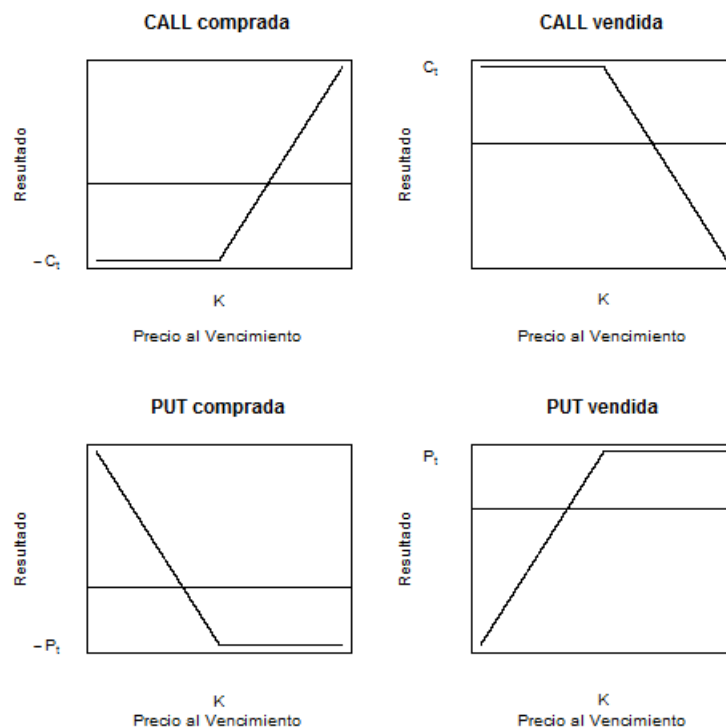


Figura 2.5: Resultado de una opción CALL y PUT al vencimiento.

Estrategias Simples

Las opciones financieras quizás sean los mejores instrumento para cubrir cualquier riesgo sobre el precio de los bonos. Con las opción trasladamos el riesgo de perdida a un tercero mientras conservamos en nuestro poder la posibilidad de seguir obteniendo beneficios, en caso de una evolución favorable en el precio del bono. Las estrategias simples consisten en la compra o venta de un solo tipo de opción:

- Compra de Opción CALL, con esta opción el inversor se aprovecha de la subida del precio del bono debido a que ya estableció el precio de compra de antemano, teniendo limitadas y conocidas las pérdidas. En caso de que el precio caiga solo pierde el importe de la prima.
- Venta de Opción CALL, en este caso el inversor debe estar seguro de que el precio del bono se vaya a mantener estable o con ligeras caídas y que haya muy pocas probabilidades de que el precio del bono suba (para evitar ser ejercido por el comprador de la opción). Esta es una opción muy adecuada cuando el inversor tiene en su portafolio bonos que están muy sobrevalorados. Esta estrategia se diferencia claramente con la anterior dado que la primera es una estrategia de cobertura y esta es una estrategia especulativa.
- Compra de Opción PUT, cuando un inversor cuenta con un bono y tenga una creencia de que el precio del bono tiene grandes probabilidades de caer a corto plazo, y al mismo tiempo cree que tiene una tendencia a la suba en el largo plazo, por lo que no desea

vender dicho bono. Con la opción PUT el inversor obtiene beneficios con la caída de precios sin necesidad de vender el bono, y de este modo se aprovecharía de la futura subida de precios. Esta es una estrategia de cobertura dado que si tiene bonos y cae su cotización, las ganancias obtenidas con la opción PUT compensan en todo o en parte la pérdida experimentada por la caída del precio del bono.

- Venta de Opción PUT, en caso de que el inversor esté convencido de que el precio del bono va a mantenerse estable o subir moderadamente, podrá optar por vender una opción PUT. En el gráfico (2.5) se observa que el punto de equilibrio de una opción PUT se determina a través de la diferencia entre el precio pactado (K) y la prima, por lo tanto el inversor deberá elegir aquella opción PUT cuyo punto de equilibrio se encuentre por debajo del precio estimado para el bono. Claramente esta estrategia es especulativa.

Estrategias Complejas

Además de las estrategias simples, las opciones ofrecen amplias posibilidades más elaboradas, si el inversor es capaz de anticipar correctamente los potenciales movimientos de los precios. Para constituir estas estrategias se tienen múltiples alternativas en las que se combinan dos o más opciones con igual o diferente precio pactado (K), aunque siempre con la misma fecha de vencimiento (t) y mismo activo subyacente ($P(t, T)$).

Estrategias Spread

Este tipo de estrategia se puede conformar tanto para mercados alcistas como bajistas. Para el primer caso se pueden comprar y vender opciones CALL teniendo en cuenta que el precio pactado de la opción CALL comprada debe ser menor que el de la opción CALL vendida. También se pueden comprar y vender opciones PUT, el PUT comprado también debe tener un mayor precio pactado que el de la PUT vendida.

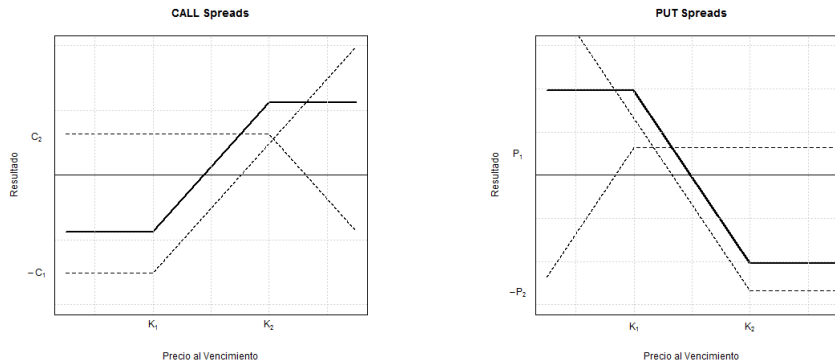


Figura 2.6: Estrategia Spread.

Estrategias Túnel

Para conformar un túnel el inversor debe comprar y vender dos tipos de opciones distintas. Este tipo de estrategia se puede conformar tanto para mercados alcistas como bajistas. Si el inversor cree que el mercado es alcista con mayor probabilidad que bajista, podemos crear una estrategia denominada túnel alcista que consiste en la compra de una opción CALL con un precio pactado superior al precio actual del activo subyacente y la venta de una opción PUT con un precio pactado de inferior a la cotización actual del bono.

Por otro lado, si las expectativas son las inversas al caso anterior, podríamos crear la estrategia

opuesta, denominada túnel bajista, para ello compramos una opción PUT con un precio pactado inferior al precio actual del bono y vendemos una opción CALL con un precio pactado superior a la cotización actual del bono.

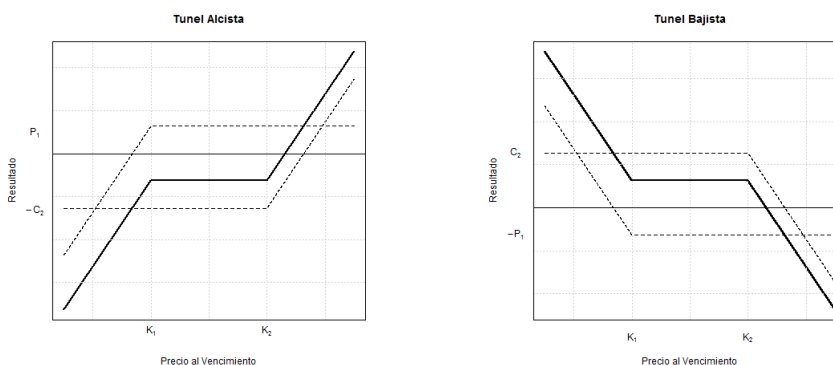


Figura 2.7: Estrategias Túnel.

Estrategias Straddles

Para realizar esta estrategia es necesario tener expectativas sobre la volatilidad futura. Es utilizada cuando el mercado tenga alzas o bajas significativas o, por el contrario, se quede estático. Para el primer caso se utilizan los straddles comprados, mientras que si se prevé que el mercado permanecerá invariable o sus movimientos serán mínimos, se hará uso del straddles vendido.

El straddles comprado consiste en adquirir una opción PUT y una opción CALL que tengan igual precio pactado e igual fecha de vencimiento. Mientras que el straddles vendido consiste en vender una opción PUT y una opción CALL también al mismo precio pactado y fecha de vencimiento.

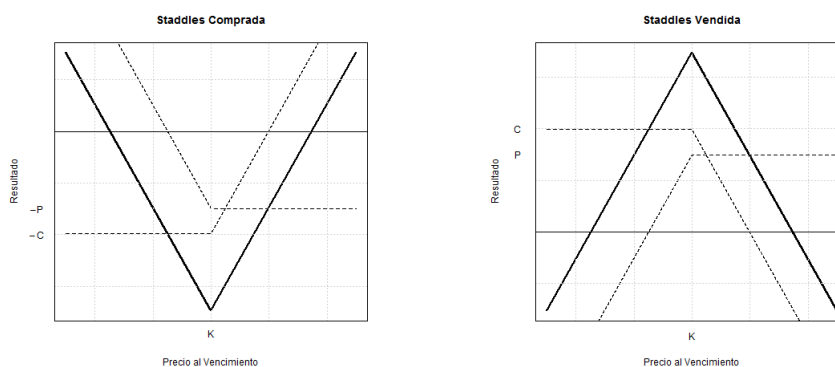


Figura 2.8: Estrategias Straddles.

Estrategias Strangles

Esta estrategia es muy parecida a la de los straddles con la diferencia que en este caso las pérdidas máximas (cuando se trata de la strangles comprada) son limitadas a un valor inferior que se extiende por una serie de valores. Algo similar ocurre con las ganancias que se obtienen cuando se trabaja con una strangles vendida.

La strangles comprada consiste en comprar una opción CALL y una opción PUT sin importar

que sus precios pactados sean iguales. De esta manera se logra reducir el riesgo con respecto al cono ya que las posibles pérdidas son inferiores. Obviamente con esto también se reduce el retorno, en caso de que se obtengan beneficios. Sin embargo, el grado de riesgo y agresividad se puede regular dentro de ellas dependiendo del precio pactado que se elija.

La strangles vendida consiste en vender una opción CALL y una opción PUT con distintos precios pactados. Al igual que en el caso de las strangles compradas para el caso de las vendidas los beneficios también quedan limitados y, por ende, también queda limitada la rentabilidad.

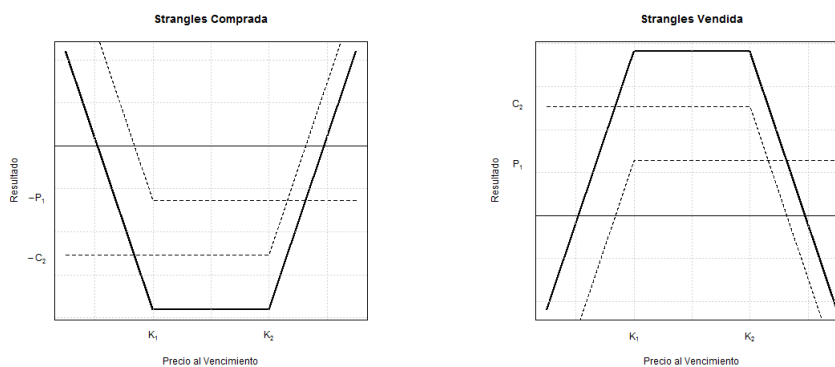


Figura 2.9: Estrategias Strangles.

Estrategias Butterfly

Al igual que las estrategias anteriores estas también cuentan con dos versiones: comprada y vendida. Sin embargo, para armar estas estrategias es necesario emplear más de dos opciones. Esta estrategia es muy parecida a la de los straddles, por lo tanto, es indispensable acertar en la volatilidad futura en relación con la volatilidad implícita del mercado. A diferencia de los straddles, con los que se podían obtener beneficios o pérdidas ilimitadas, con las butterfly estos resultados quedan restringidos.

La butterfly comprada consiste en comprar dos opciones CALL y vender otras dos. Los precios pactados de las opciones compradas deben ser los precios extremos de las cuatro opciones. Las dos opciones CALL vendidas deben tener precios pactados intermedios, además éstos deben ser iguales.

La butterfly vendida consiste en comprar dos opciones PUT con precios pactados intermedio e iguales y vender otras dos opciones pero con precios pactados extremos. Los resultados que se obtendrían empleando esta estrategia son simétricamente inversos a los que se obtendrían con la butterfly comprada.

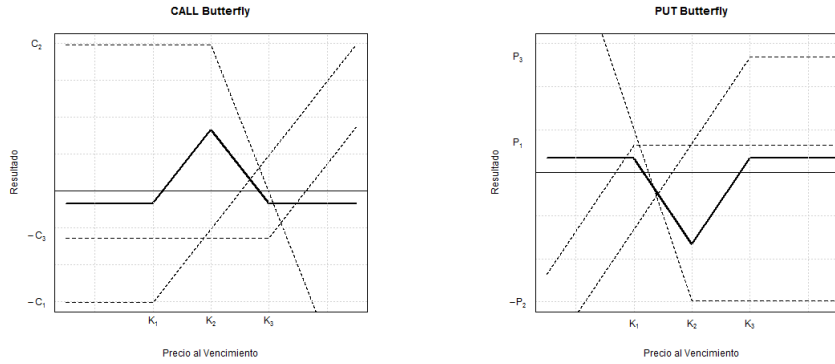


Figura 2.10: Estrategias Butterfly.

Estrategias Back Spread

Esta estrategia es muy parecida a la spread con la diferencia que en este caso los precios pactados están invertidos y se utilizan tres opciones. Este tipo de estrategia se puede conformar tanto para mercados alcistas como bajistas. Para el primer caso se pueden comprar dos opciones CALL y vender una teniendo en cuenta que el precio pactado de la opción CALL comprada debe ser mayor que el de la opción CALL vendida. También se pueden comprar y vender opciones PUT, y al igual que en el caso de la CALL, el PUT comprado también debe tener mayor precio pactado que el de la PUT vendida.

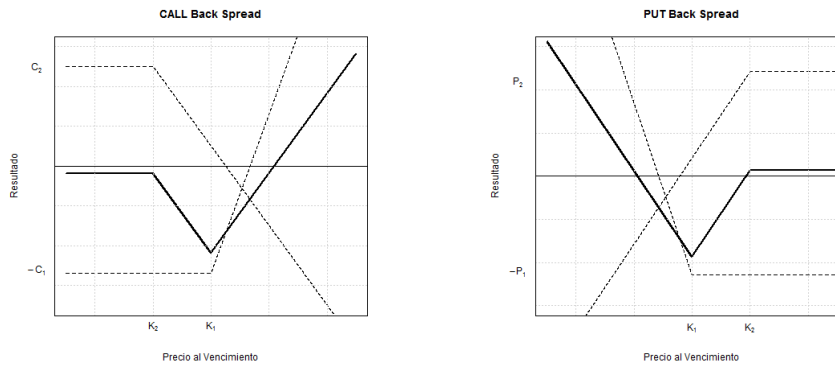


Figura 2.11: Estrategias Back Spread.

Ajuste de la Curva de Rendimiento

En la práctica no existen bonos para todos los posibles vencimientos T , además no necesariamente todos los bonos cotizan en el mercado en un mismo día, por lo tanto no se obtiene precio del mercado para un día t . Es por esta razón que existen una cantidad de modelos para ajustar la estructura temporal de tasas de interés [11] [21], en este capítulo se proporciona una descripción básica de dos formas de modelar la tasa de interés, conocidos como modelos Nelson-Siegel [19] y modelos Svensson [22]. Dichos modelos son los más utilizados en la práctica para ajustar la curva de rendimientos, básicamente especifican una forma funcional para la curva en un momento del tiempo dado.

En 2005, el BIS (Bank for International Settlements) [1] realizó un relevamiento de las distintas técnicas utilizadas por los Bancos Centrales para estimar la curva de rendimiento encontrando que en Bélgica, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Noruega, España y Suiza utilizan estos modelos para ajustar la estructura temporal de tasas de interés.

Luego, realizaremos un interpretación de los parámetros de los modelos y finalizaremos el capítulo con algunos comentarios sobre distintas técnicas para estimar la curva de rendimiento y su volatilidad.

Para simplificar la notación en este capítulo el parámetro t es fijo por lo cual lo omitiremos, es decir, denotaremos $f(m) = f(t, T)$ y $r(m) = r(t, T)$ siendo $m = T - t$.

Método Nelson-Siegel

El método desarrollado por Nelson y Siegel (1987) asume explícitamente la forma de la función de la tasa forward instantánea en el momento t de la siguiente forma

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{-m/\tau_1} = \beta_0 + \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \right) e^{-m/\tau_1}.$$

En esta ecuación m denota el tiempo hasta el vencimiento ($m = T - t$), $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y τ_1 son parámetros a estimar. La tasa de interés $r(m)$ se puede derivar integrando la tasa forward instantánea obteniendo

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 (1 - e^{-m/\tau_1}) \left(\frac{m}{\tau_1} \right)^{-1} + \beta_2 \left((1 - e^{-m/\tau_1}) \left(\frac{m}{\tau_1} \right)^{-1} - e^{-m/\tau_1} \right).$$

Lo que es equivalente a

$$r(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\tau_1}{m} (1 - e^{-m/\tau_1}) - \beta_2 e^{-m/\tau_1}.$$

Para los vencimientos largos, tanto la tasa de interés como la tasa forward instantánea convergen asintóticamente al valor β_0 por lo cual el mismo tiene que ser positivo. La suma $(\beta_0 + \beta_1)$ determina el valor inicial de la curva de rendimientos, es decir la tasa de interés a muy corto plazo. Por lo tanto β_1 representa el spread o la desviación del punto de convergencia asintótica

β_0 con la tasa de muy corto plazo. Además $(\beta_0 + \beta_1)$ tiene que ser positivo. Los dos parámetros restantes β_2 y τ_1 son responsables de la curvatura. La magnitud de la curvatura viene dada por el valor absoluto de β_2 mientras que su dirección esta dada por el signo. τ_1 determina la posición de la curvatura, por lo cual tiene que ser positivo.

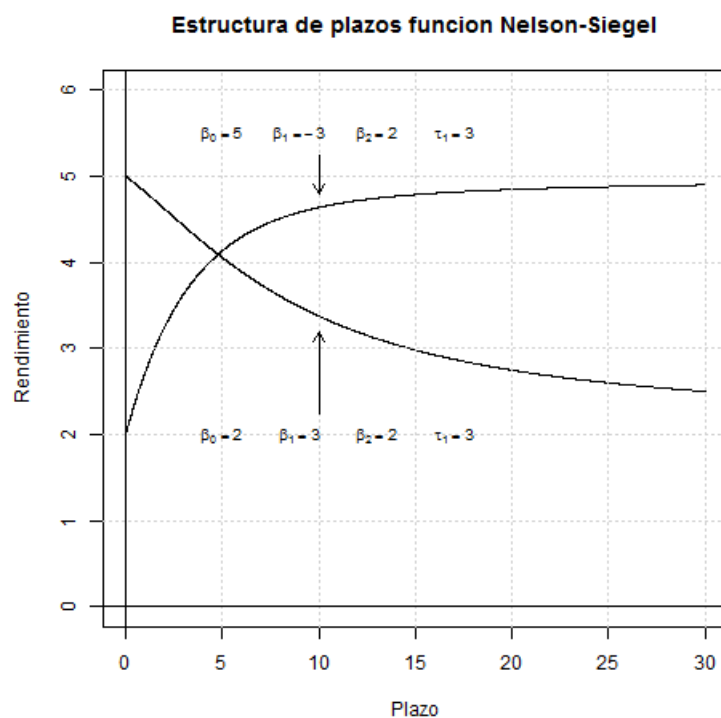


Figura 3.1: Ejemplo de Curva parametrizada con Nelson-Siegel.

Relación entre parámetros

El parámetro que recoge la tendencia es β_1 . El signo de este coeficiente determinará si la curva es creciente o decreciente. En general, si el parámetro β_1 es negativo, la función crece y si, contrariamente, es positivo, la curva decrece.

Además, si el parámetro β_1 es negativo y su valor en términos absolutos es mayor o igual que el valor absoluto de β_2 , $|\beta_1| \geq |\beta_2|$, la estructura temporal es monótonamente creciente, independientemente del signo de β_2 .

Cuando el parámetro β_1 es positivo, la función decrece. Esto implica que la tasa de interés a corto plazo es superior a la tasa de interés de largo plazo, la curva de rendimientos está invertida.

Asimismo, para obtener una curva monótona decreciente, el parámetro β_1 debe tomar valores positivos y además debe mantenerse la misma condición anterior $|\beta_1| \geq |\beta_2|$.

Por el contrario, si los parámetros β_1 y β_2 son ambos positivos o negativos y se cumple la condición $|\beta_1| < |\beta_2|$, la función presenta un punto estacionario (máximo o mínimo) y la curva se sitúa encima o debajo de la línea de β_0 . Además, la curva se situará por debajo del valor del parámetro de nivel β_0 , si ambos parámetros de pendiente y curvatura poseen signo negativo. Si dichos parámetros presentan signo positivo, la curva de rendimientos se situará por encima del valor de β_0 . Sin embargo, manteniéndose la condición anterior $|\beta_1| < |\beta_2|$, si los parámetros β_1 y β_2 presentan distinto signo, la curva cruza línea β_0 . Cruzará este valor por debajo si β_2 es negativo, y lo hará por arriba en el caso que β_1 sea negativo.

En general, si se da la condición $|\beta_1| \geq |\beta_2|$ habrá monotocidad en la función y si se da la situación contraria, $|\beta_1| < |\beta_2|$, existirá un punto estacionario. En caso de monotocidad, si β_1 es positivo, la función será decreciente y si este parámetro es negativo, la función será creciente. Cuando se de la condición $|\beta_1| < |\beta_2|$, entonces la función presentará un punto estacionario, que estará más cerca o lejos del valor del parámetro β_0 , según si β_1 y β_2 presentan distinto o igual signo. Concretamente, cuanto mayor sea el valor absoluto de β_2 comparado con el valor absoluto de β_1 , más acentuada será la convexidad o concavidad.

Forma Curva	β_0	β_1	β_2	τ_1	Condición
Creciente cóncava	+	-	+	+	$ \beta_1 \geq \beta_2 $
Creciente	+	-	-	+	$ \beta_1 \geq \beta_2 $
Decreciente convexa	+	+	-	+	$ \beta_1 \geq \beta_2 $
Decreciente	+	+	+	+	$ \beta_1 \geq \beta_2 $
Máximo por encima de β_0	+	+	+	+	$ \beta_1 < \beta_2 $
Máximo cruza β_0	+	-	+	+	$ \beta_1 < \beta_2 $
Mínimo por debajo de β_0	+	-	-	+	$ \beta_1 < \beta_2 $
Mínimo cruza β_0	+	+	-	+	$ \beta_1 < \beta_2 $

Método Svensson

Para mejorar la flexibilidad de las curvas y el ajuste, Svensson (1994) extendió la función de Nelson-Siegel mediante la adición de un nuevo período que permite una segunda curvatura. La precisión adicional se consigue a costa de la adición de dos parámetros más β_3 y τ_2 que tienen que ser estimados. La tasa forward instantánea queda de la siguiente forma:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{-m/\tau_1} + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{-m/\tau_2}.$$

donde β_3 y τ_2 tienen las mismas características que β_2 y τ_1 mencionadas en el apartado anterior. Una vez más, para derivar la tasa de interés se integra la tasa forward instantánea:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 (1 - e^{-m/\tau_1}) \left(\frac{m}{\tau_1}\right)^{-1} + \beta_2 \left((1 - e^{-m/\tau_1}) \left(\frac{m}{\tau_1}\right)^{-1} - e^{-m/\tau_1} \right) \\ + \beta_3 \left((1 - e^{-m/\tau_2}) \left(\frac{m}{\tau_2}\right)^{-1} - e^{-m/\tau_2} \right).$$

Relación entre parámetros

La interpretación de los parámetros β_0 , β_1 , β_2 y τ_1 es la misma que en el modelo de Nelson-Siegel.

En esta versión extendida, el parámetro τ_2 , que también debe ser positivo por las mismas razones que τ_1 , está relacionado con la posición de la segunda curvatura. El término β_2 permite una primera curvatura en el corto plazo. El término β_3 , análogamente al parámetro β_2 , determina la magnitud y dirección de la segunda curvatura, que se sitúa en un vencimiento superior del primer punto estacionario.

A lo largo de todo el tramo de vencimientos, la estructura temporal cambia dos veces su curvatura hasta decaer hacia β_0 . Si el parámetro β_3 es positivo, la segunda curvatura toma forma

cóncava y en caso contrario, cuando β_3 sea negativo, la segunda curvatura es convexa. En general, cuanto mayor sea β_3 comparado con β_1 , más acentuada será la convexidad o concavidad.

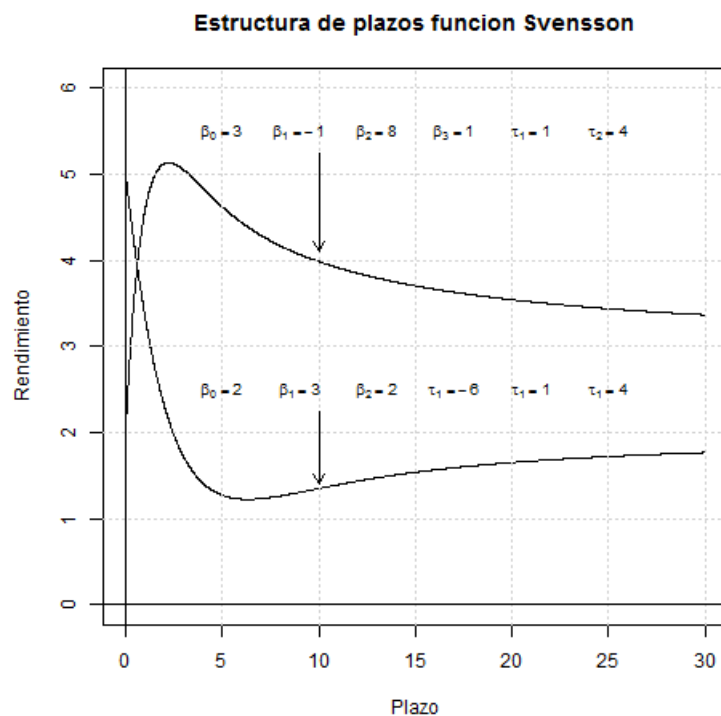


Figura 3.2: Ejemplo de Curva parametrizada con Svensson.

Ajuste de los parámetros

Los vectores de parámetros desconocidos β y τ de la función $r_t(m)$ pueden obtenerse minimizando $F(\beta, \tau)$ el error cuadrático de los rendimientos.

$$\begin{aligned} & \min_{\beta, \tau} F(\beta, \tau) \\ & \beta_0 \geq 0, \beta_0 + \beta_1 \geq 0 . \\ & \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Siendo la función objetivo $F(\beta, \tau)$ de la forma

$$F(\beta, \tau) = \sum (r^*(m) - r(m))^2 .$$

El problema de optimización que se indica en (3.1) es no convexo y puede tener múltiples óptimos locales, lo que aumenta considerablemente la dependencia de los resultados encontrados de los valores de inicio. Se observa que la función $F(\beta, \tau)$ es convexa en β , la no convexidad de la función viene dada por τ . Es por esta razón que Werner y Ferenczi (2006) [9] proponen reformular el problema (3.1) aprovechando la convexidad en β obteniendo el problema equivalente

$$\min_{\tau \geq 0} H(\tau) . \tag{3.2}$$

Donde

$$\begin{aligned} H(\tau) = \min_{\beta} F(\beta, \tau) \\ \beta_0 \geq 0 \\ \beta_0 + \beta_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La ventaja de determinar el problema de esta forma es que cambiamos un problema (3.1) no convexo con 4 parámetros (6 en el caso de Svensson) a un problema (3.3) convexo fácil de resolver para los β y un problema (3.2) no convexo para 1 parámetro τ (2 en el caso de Svensson).

Para este trabajo realizaremos el ajuste de los parámetros mediante el paquete `ternstrc` del software estadístico R según como se establece en [9].

Técnicas Alternativas

Una posible técnica alternativa para ajustar la curva de rendimientos es mediante la utilización de métodos basados en splines propuesta por McCulloch en 1975 [17]. En lugar de especificar una forma funcional única para cualquier vencimiento, los métodos basados en splines adaptan la curva de rendimiento en un polinomio a trozos, donde los segmentos se unen suavemente en los nudos. En un intervalo cerrado, una función continua se puede aproximar mediante la selección de un polinomio arbitrario. Las funciones splines se basan generalmente en polinomios de orden cuadrático o cúbico. Una curva splines cúbica, por ejemplo, es un polinomio cúbico a trozos restringido en los nudos de tal manera que sus niveles y primeras dos derivadas sean idénticas.

En general, el método de ajuste depende en gran medida del uso previsto de los datos: no arbitraje de precios, valoración de los instrumentos de renta fija, política monetaria, etc. Una de las principales ventajas de las técnicas splines sobre los métodos paramétricos, tales como el método de Svensson, es que, en lugar de especificar una forma funcional para describir la tasa de interés, el método splines ajusta una curva a los datos que se compone de muchos segmentos, con la restricción de que la curva total sea continua y suave.

Habitualmente, en los modelos splines la información publicada sobre la estructura temporal de tasas de interés se realiza en puntos discretos a lo largo del espectro de vencimientos. Tales limitaciones se mitigarían si la información se presenta en términos de expresiones algebraicas a partir de la cual se pueden derivar las tasas de interés y las tasas forward. Esto es sencillo en enfoques parsimoniosos como Nelson-Siegel y Svensson mencionados anteriormente, utilizando los parámetros estimados (β y τ).

Volatilidad de la Curva de Rendimientos

En los últimos 10 años se han observado períodos donde el rendimiento ha sido muy volátil, por ejemplo, en Uruguay los rendimientos de las Letras de Regulación Monetaria (bonos cupón cero) con vencimiento 30 días han sido superiores a 20% e inferiores al 2%. Como resultado, los administradores de portafolio que invierten en renta fija se han vuelto muy conscientes del riesgo de tipo de interés y su exposición a la misma.

La gestión del riesgo de tipo de interés se realiza habitualmente mediante el análisis de Duración. Los análisis de Duración se ha convertido en una herramienta importante, permitiendo a los administradores de portafolios medir la sensibilidad de sus portafolios a los cambios en el nivel

de la tasa de interés.

La Duración para el precio de un bono con cupón (2.2) se define de la siguiente forma

$$D = \frac{-1}{P(t, T, c)} \frac{\partial P(t, T, c)}{\partial y_t^c}.$$

La medida D indica el cambio porcentual en el precio ($\partial P(t, T, c)/P(t, T, c)$) ante un cambio en la rentabilidad exigida (∂y_t^c). Según la ecuación (2.2) si $y_t^c > 0$ entonces $\partial P(t, T, c)/\partial y_t^c$ es negativo, por lo que D es positivo. Esto significa que ante un aumento en la rentabilidad exigida ($\partial y_t^c > 0$) se produce un descenso porcentual en el precio del bono ($\partial P(t, T, c)/P(t, T, c)$). Esto es análogo para los bonos cupón cero cuyo precio $P(t, T)$ se definió en (2.1), sustituyendo $y_t^c = r(t, T)$. Es claro que D es distinto en cada punto de la curva de rendimiento, en particular, para un mismo cupón c y tasa y_t^c el valor de D aumenta con el vencimiento, es decir, el precio del bono es más sensible frente a cambios en las tasas de interés cuando el vencimiento aumenta. Sin embargo, el análisis de duración tiene una serie de inconvenientes, por ejemplo, sólo permite movimientos paralelos de la estructura temporal de las tasas de interés. Así, los administradores de portafolios pueden permanecer expuestos a un riesgo sustancial que surge de cambios no paralelos. Además, el análisis de Duración se centran en el riesgo de cambios en el nivel de las tasas de interés, y hace caso omiso a otros tipos de riesgos relevantes, incluyendo los cambios en la frecuencia de los grandes movimientos en las tasas de interés.

La volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios en la tasa de interés como la desviación estándar de dicho cambio en un horizonte temporal específico. Como ya se mencionó los precios son más sensibles frente a cambio en las tasas de interés cuando aumenta el plazo al vencimiento. Es por esta razón, que es esperable tener volatilidades más grandes en el corto plazo. Este vínculo sugiere una relación entre el nivel de volatilidad de las tasas de interés y la forma de la curva de rendimientos.

La volatilidad se expresa comúnmente en términos anuales. Para determinar la volatilidad de la curva de rendimientos se utilizaran datos históricos de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{\sigma_{SD}}{\sqrt{P}},$$

donde σ_{SD} es el desvío estándar de los cambios en los rendimientos y P es el período de los rendimientos. En este trabajo utilizaremos los rendimientos diarios, por lo cual, un año calendario cuenta con 252 días hábiles aproximadamente. En este caso, la volatilidad quedaría de la forma:

$$\sigma = \frac{\sigma_{SD}}{\sqrt{1/252}}.$$

Fundamentos Matemáticos

En este capítulo se desarrolla una versión resumida de los fundamentos matemáticos que sustentan los modelos que se presentan, existen diversos autores que profundizan en estos conceptos ([2], [5], [8], [10],[20]). Por mayor detalle consultar el libro *Martingale Methods in Financial Modelling* de Musiela y Rutkowski [18].

En el transcurso de este capítulo se trabaja en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ donde la filtración $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$ es una familia creciente de σ -álgebras tales que, $\mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$ para cualquier $0 \leq u \leq t \leq T$. Se asumirá que T es finito y estrictamente positivo por lo cual fijaremos $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Modelo Estándar de Mercado y Arbitraje

Se considera un mercado en el cual existen k activos financieros, cuyos precios de mercado están dados por el proceso estocástico $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^k)$. Un portafolio $\phi_t = (\phi_t^1, \dots, \phi_t^k)$ consiste en la cantidad de cada activo, en cierto instante de tiempo. Definimos una estrategia como aquel portafolio dinámico que surge de comprar y vender los activos en distintos tiempos $t \in [0, T]$. El valor del portafolio $V(\phi)$, en cierto instante, es definido como el producto escalar entre el portafolio y el precio de los activos.

Definición 4.1 *Decimos que el proceso estocástico predecible $\phi_t = (\phi_t^1, \dots, \phi_t^k)$, $t \in [0, T]$ es una estrategia autofinanciante sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$, si el proceso $V(\phi)$ es definido como*

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot Z_t = \sum_{i=1}^k \phi_t^i Z_t^i, \quad \forall t \in [0, T],$$

y satisface que $V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi) \forall t \leq T$, donde el proceso de ganancia $G_t(\phi)$ es de la forma

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dZ_u \quad \forall t \in [0, T].$$

Dado que $G_t(\phi)$ modela las ganancias y pérdidas realizadas hasta tiempo t , es claro que se asume que los activos no generan ingresos, como ser dividendos. Si un activo paga dividendos continuamente a la tasa $\kappa_t = (\kappa_t^1, \dots, \kappa_t^k)$, entonces el proceso de ganancia $G_t(\phi)$ también acumula las ganancias de los mismos, por lo tanto

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dZ_u + \int_0^t \phi_u Z_u^\kappa du \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $Z_t^\kappa = (\kappa_t^1 Z_t^1, \dots, \kappa_t^k Z_t^k)$. Por conveniencia, se asume que $\kappa = 0$.

La interpretación financiera de la definición anterior, es que toda variación en el valor del portafolio se debe solamente a cambios en los precios de los activos, por lo cual se asume que no se retiran ni ingresan fondos al portafolio. También se asume que no existen costos

de transacción. Denotaremos Φ_T al conjunto de todas las estrategias autofinanciantes posibles sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$.

Definición 4.2 Una estrategia $\phi \in \Phi_t$ se dice que tiene una oportunidad de arbitraje, si el proceso $V(\phi)$ cumple con las siguientes condiciones

$$V_0(\phi) = 0, \quad P(V_T(\phi) \geq 0) = 1, \quad P(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Las oportunidades de arbitraje nos permiten diseñar estrategias que garanticen ganancias libres de riesgo y por lo tanto no debería existir en un mercado que funcione correctamente. El conjunto de estrategias Φ_T no garantiza que no existan oportunidades de arbitraje, es por esta razón que se debe restringir las estrategias al subconjunto $\Psi_T \subset \Phi_T$, el cual llamamos conjunto de estrategias admisibles (Ψ_T se definirá más adelante). Dado un conjunto de estrategias admisibles $\Psi = \cup_{t \leq T} \Psi_t$ diremos que el mercado $\mathcal{M} = (Z, \Psi)$ es viable cuando no existen oportunidades de arbitraje en Ψ . Pero primero debemos introducir los derivados financieros dentro del modelo de mercado.

Como adelantamos un derivado es un activo financiero cuyo valor depende del precio de otro activo. Por ejemplo, una opción CALL europea sobre el activo subyacente Z^k tiene una función de pago en su vencimiento

$$\nu(T) = \begin{cases} Z_T^k - X & \text{si } Z_T^k \geq X. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a que no sabemos la manera en la que se comportará el precio de Z_T^k , $\nu(T)$ es una variable aleatoria \mathcal{F}_T -medible, a esta clase de activos se los denomina “reclamo contingente”.

Definición 4.3 Una estrategia $\phi \in \Psi_T$ replica un reclamo contingente X con vencimiento en T si $V_T(\phi) = X$. Si el reclamo X es replicable por al menos una estrategia $\phi \in \Psi_T$, se dice que el reclamo es alcanzable por \mathcal{M} y que el proceso $V(\phi)$ replica el proceso X .

Supuesto 4.1 Para cualquier reclamo alcanzable por \mathcal{M} existe una única estrategia que replica el reclamo, quedando excluidas aquellas estrategias que generan oportunidades de arbitraje.

Como se ha mencionado anteriormente, para desarrollar un mercado viable se necesitan introducir las estrategias admisibles. Las estrategias admisibles surgen de la noción de medida martingala sobre los precios relativos.

El proceso Z^* representa el precio relativo cuando Z^k es elegido como numerario, es decir, $Z_t^* = Z_t/Z_t^k = (Z_t^1/Z_t^k, \dots, 1)$. Para cualquier estrategia ϕ , denotamos el valor del portafolio como

$$V_t^*(\phi) = V(\phi)/Z_t^k = \phi_t \cdot Z_t^*, \quad \forall t \in [0, T].$$

Definición 4.4 Una probabilidad \mathbb{Q} en (Ω, \mathcal{F}_T) , equivalente a \mathbb{P} es llamada

- medida martingala para Z^* si Z^* es una martingala local sobre \mathbb{Q} .
- medida martingala para \mathcal{M}^k si $\forall \phi \in \Phi$ el proceso $V(\phi)$ es una martingala local sobre \mathbb{Q} .

En la definición anterior el valor k dentro de \mathcal{M}^k denota la elección del numerario. También se asume que existe al menos una medida martingala para \mathcal{M}^k .

Lema 4.1 Una medida de probabilidad \mathbb{Q} es una medida martingala para Z^* \Leftrightarrow es una medida martingala para \mathcal{M}^k .

Definición 4.5 Una estrategia $\phi \in \Phi_T$ es \mathbb{Q} -admisibles si el proceso de ganancia relativo

$$G_t^*(\phi) = \int_0^t \phi_u \cdot dZ_u^*, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

sigue una martingala local sobre \mathbb{Q} .

Se denota $\mathcal{M}^k(\mathbb{Q})$ al mercado \mathcal{M}^k compuesto por todas las estrategias que son \mathbb{Q} -admisibles. Sea X un reclamo contingente alcanzable en $\mathcal{M}^k(\mathbb{Q})$. El proceso $V(\phi)$ de cualquier estrategia \mathbb{Q} -admisibles que replica X , es llamado precio de arbitraje de X en $\mathcal{M}^k(\mathbb{Q})$, el cual se denota $\pi_t^k(X|\mathbb{Q})$.

Definición 4.6 Sea X un reclamo contingente con vencimiento en T de forma que la variable aleatoria X/Z_T^k sea \mathbb{Q} -integrable. El valor esperado del proceso X relativo a Z_t^k sobre \mathbb{Q} es definido como

$$\nu_t^k(X|\mathbb{Q}) = Z_t^k \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X/Z_T^k | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T].$$

El siguiente resultado relaciona el precio de arbitraje con el valor esperado del proceso.

Proposición 4.1 Para cualquier reclamo contingente X con vencimiento en T y alcanzable en $\mathcal{M}^k(\mathbb{Q})$ tenemos que

$$\nu_t^k(X|\mathbb{Q}) = \pi_t^k(X|\mathbb{Q}), \quad \forall t \in [0, T].$$

Definición 4.7 Una estrategia $\phi \in \Phi_T$ se dice que es dominante relativa a Z^k si existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que para $V^*(\phi) = V(\phi)/Z^k$ se cumpla $V^*(\phi) \geq m \forall t \in [0, T]$.

Ahora estamos en condiciones de definir estrategias admisibles.

Definición 4.8 Una estrategia $\phi \in \Phi_T$ se dice admisible respecto a Z^k si es una estrategia dominante relativa a Z_t^k y \mathbb{Q} -admisibles para una medida martingala \mathbb{Q} .

Denotaremos Ψ^k al conjunto de todas las estrategias admisibles relativa a Z^k . Llamaremos al mercado $\mathcal{M}^k = (Z, \Psi^k)$ modelo estándar de mercado.

Teorema 4.1 El modelo estándar de mercado \mathcal{M}^k es libre de arbitraje.

Para demostrar el teorema se observa que el proceso $V^*(\phi)$ para la estrategia $\phi \in \Psi^k$, es una \mathbb{Q} -supermartingala, entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_u^*(\phi) | \mathcal{F}_t) \leq V_t^*(\phi) \quad \forall t \leq u \leq T.$$

En particular, si $V_0(\phi) = 0$ se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_T^*(\phi) | \mathcal{F}_t) \leq V_0^*(\phi) = 0,$$

por lo tanto si $P(V_T(\phi) \geq 0) = 1$ entonces $P(V_T(\phi) > 0) = 0$. Este resultado nos asegura que no existen oportunidades de arbitraje en Ψ^k .

A modo de resumen, la ausencia de arbitraje está asociada a la existencia de la medida martingala \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} por lo tanto la existencia de la misma es un supuesto ampliamente utilizado. Respecto la elección del numerario, en la práctica se suele usar un activo libre de riesgo, tal como una cuenta bancaria.

Modelo estocástico del precio del bono

Recordamos que un Bono Cupón Cero paga \$1 en tiempo T , denotamos $P(t, T)$ al precio del mismo en tiempo $t < T$. Necesariamente se tiene que cumplir que $P(t, t) = 1 \forall t \in [0, T]$. Es más, dado que no hay pago de intereses, el precio de mercado del bono es siempre menor que \$1, es decir, $P(t, T) < 1 \forall t \in [0, T]$.

Supuesto 4.2 Para cualquier vencimiento T fijo, $P(t, T)_{t \in [0, T]}$, es un proceso estrictamente positivo definido en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ generado por un movimiento browniano W d -dimensional.

La primera interrogante que nos planteamos es si existen oportunidades de arbitraje entre todos los bonos con diferentes vencimientos y una cuenta bancaria, la cual se considera como un activo libre de riesgo y para la cual asumimos:

Supuesto 4.3 Una cuenta bancaria evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

donde asumimos que $B(0) = 1$ y r es un proceso adaptado en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, como consecuencia tenemos que

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Entonces la siguiente definición nos garantiza que no exista arbitraje.

Definición 4.9 Una familia $P(t, T)$ con $t \leq T$, de procesos adaptados es llamada: familia de precios libre de arbitraje en relación a la tasa instantánea r , si se cumplen las siguientes condiciones

- $P(t, t) = 1 \forall t \in [0, T]$.
- Existe una medida de probabilidad \mathbb{Q} en (Ω, \mathcal{F}_T) equivalente a \mathbb{P} , tal que $\forall t \in [0, T]$ el precio relativo del bono

$$Z(t, T) = \frac{P(t, T)}{B(t)} \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.2)$$

es una martingala respecto \mathbb{Q} .

Cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} de la definición (4.9) es llamada *medida martingala para la familia $P(t, T)$* . La razón por la cual asumimos que los precios relativos Z son martingala es porque es fácil demostrar que $Z(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z(T, T) | \mathcal{F}_t)$ para $t \leq T$, lo que implica que el precio del bono es de la forma

$$P(t, T) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B^{-1}(T) | \mathcal{F}_t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

En otras palabras, para cualquier *medida martingala* \mathbb{Q} para la familia de bonos tenemos que

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t\right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

Es común asumir que la dinámica de la tasa instantánea $r(t)$ sea como una ecuación diferencial estocástica, usualmente es de la forma:

$$dr(t) = \mu_t dt + \sigma_t dW(t), \quad r(0) > 0. \quad (4.5)$$

donde W es un movimiento browniano d -dimensional y μ y σ son procesos adaptados bien definidos que toman valores en \mathbb{R} y \mathbb{R}^d respectivamente.

De acuerdo a la ecuación (4.5) podemos representar la tasa instantánea como

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW(s), \quad \forall t \in [0, T].$$

La interpretación financiera es que la medida de probabilidad \mathbb{P} refleja una evaluación subjetiva del mercado sobre el comportamiento futuro de la tasa instantánea, en oposición a la medida martingala \mathbb{Q} para la familia de precios que vamos a construir.

Sabemos por la derivada de Radon-Nikodym que cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} es equivalente a \mathbb{P} en (Ω, \mathcal{F}_T) si

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \varepsilon_T \left(\int_0^T \lambda_u \cdot dW(u) \right) \stackrel{def}{=} \eta_T. \quad (4.6)$$

para algún proceso adaptado λ en \mathbb{R}^d que cumpla la condición de Novikov

$$\mathbb{E} \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du} \right) < \infty.$$

La parte derecha de la ecuación (4.6) es la exponencial de Doleans que es de la forma

$$\eta_t \stackrel{def}{=} \varepsilon_t \left(\int_0^t \lambda_u \cdot dW(u) \right) = \exp \left(\int_0^t \lambda_u \cdot dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_u|^2 du \right). \quad (4.7)$$

dado un proceso adaptado λ , escribimos \mathbb{P}^λ a la medida de probabilidad que es equivalente a \mathbb{P} según la derivada de Radon-Nikodym. Luego por el teorema de Girsanov, el siguiente proceso

$$W_t^\lambda = W_t - \int_0^t \lambda_u du, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

sigue un movimiento browniano estándar d -dimensional sobre \mathbb{P}^λ . El siguiente resultado relaciona la tasa instantánea r con el precio del bono sobre una medida de probabilidad \mathbb{P}^λ equivalente a \mathbb{P} , o mas específicamente, sobre una medida \mathbb{P}^λ que es una medida martingala en el sentido de la definición (4.9).

Proposición 4.2 *Asumimos que la tasa instantánea r es un proceso estocástico sobre la probabilidad \mathbb{P} , como se especifico en la ecuación (4.5). Sea $P(t, T)$ una familia de precios libre de arbitraje en relación a r . Para cualquier medida martingala $\mathbb{Q} = \mathbb{P}^\lambda$ de la definición (4.9), las siguientes afirmaciones son verdaderas*

- *El proceso r sobre \mathbb{P}^λ es de la forma*

$$dr(t) = (\mu_t + \sigma_t \lambda_t) dt + \sigma_t dW^\lambda(t).$$

- *Existe un proceso adaptado $b^\lambda(t, T)$ en \mathbb{R}^d tal que*

$$dP(t, T) = P(t, T) (r(t)dt + b^\lambda(t, T)dW^\lambda(t)).$$

Si fijamos T obtenemos

$$P(t, T) = P(0, T)B(t)\varepsilon_t \left(\int_0^t b^\lambda(u, T)dW^\lambda(u) \right).$$

Al proceso $b(t, T) = b^\lambda(t, T)$ lo llamamos volatilidad del precio del bono cupón cero de vencimiento T .

A modo de resumen, si la tasa instantánea $r(t)$ se comporta como en la ecuación (4.5), entonces con cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} se puede construir una familia de precios de bonos libres de arbitraje según la ecuación (4.4).

Para terminar este capítulo vamos a mencionar un importante problema (que discutiremos en el siguiente capítulo) que es ajustar los precios a la curva de rendimiento actual, la cual se supone conocida. Dado el proceso r y la medida de probabilidad \mathbb{Q} , la curva de rendimientos para $P(0, t)$ queda determinada por la fórmula

$$P(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_0^t r(s) ds} \mid \mathcal{F}_0 \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Árbol Binomial

En este capítulo comenzaremos introduciendo los modelos de árboles binomial para la tasa instantánea $r(t)$ [6] [16] [13]. Estos modelos pueden ser vistos como modelos en sí o como aproximaciones a modelos en tiempo continuo más sofisticados para la tasa instantánea $r(t)$. Vamos a tomar el último enfoque cuando vayamos a construir explícitamente modelos binomiales como aproximación a los modelos de tiempo continuo de $r(t)$. Estos modelos también se utilizan para introducir diversos instrumentos derivados de la tasa de interés que se negocian habitualmente en los mercados financieros.

Construcción de un Árbol Binomial libre de arbitraje

Consideremos el árbol binomial de la figura (5.1), en el cual especificamos la tasa instantánea $r_{i,j}$, como la tasa que va a aplicar en el próximo período posterior al nodo $N(i, j)$. Por ejemplo, esto significa que si tengo \$1 invertido en el tiempo $t = i$ en el estado j (en el nodo $N(i, j)$), entonces la inversión valdrá $\$1e^{r_{i,j}}$ en tiempo $t = i + 1$ sin importar el nodo que suceda a $N(i, j)$.

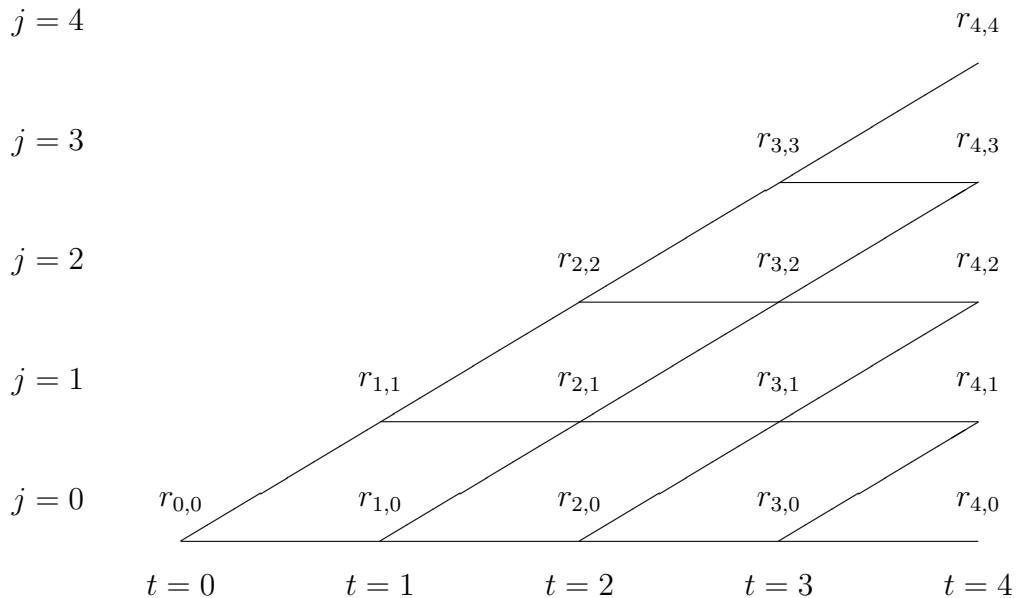


Figura 5.1: Construcción del árbol binomial libre de arbitraje.

Utilizando el supuesto de neutralidad al riesgo construiremos los precios de los activos. Por ejemplo, si $S_i(j)$ es el valor de un activo en tiempo $t = i$ en el estado j , entonces debido a la neutralidad al riesgo la relación entre el precio del activo en tiempo $t = i$ y $t = i + 1$ es de la forma

$$S_i(j) = e^{-r_{i,j}} [q_u S_{i+1}(j+1) + q_d S_{i+1}(j)]. \quad (5.1)$$

donde q_u y q_d son la probabilidad libre de riesgo de subir y bajar la tasa respectivamente (con $q_u + q_d = 1$). En caso que el activo pague cupones, este se debe agregar en la parte derecha de la función (5.1). El modelo es libre de arbitraje por construcción.

Precios de bonos a partir del Árbol Binomial

Es sencillo calcular el precio de un bono una vez que se determinó la probabilidad libre de riesgo (Q) y se especificó la estructura de la tasa instantánea. La figura (5.2) representa la estructura de la tasa instantánea en el tiempo (en este ejemplo la tasa aumenta en $u = 1,25$ y disminuye en $d = 0,9$ en cada período), y asumimos que la probabilidad libre de riesgo Q es $0,5$ independiente en cada nodo. Para calcular los precios utilizaremos la fórmula (5.1) de adelante para atrás, es decir, desde el vencimiento del bono hasta el presente ($t = 0$).

					18,3 %
				14,6 %	13,2 %
			11,7 %	10,5 %	9,5 %
		9,4 %	8,4 %	7,6 %	6,8 %
	7,5 %	6,8 %	6,1 %	5,5 %	4,9 %
6 %	5,4 %	4,9 %	4,4 %	3,9 %	3,5 %
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$

Figura 5.2: Árbol Binomial para la tasa instantánea $r(t)$.

Precio de un Bono cupón cero

En este ejemplo mostraremos como determinar el precio de un bono cupón cero cuyo valor nominal es 100 y vencimiento en $t = 4$ asumiendo el árbol presentado en la figura (5.2). Por definición sabemos que el precio del bono en $t = 4$ tiene que ser igual al valor nominal (100), por lo tanto

					100
					100
					100
					100
					100
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	

Para determinar el precio en el nodo $N(3, 3)$ aplicamos la ecuación (5.1) obteniendo el valor

$$88,94 = e^{-11,7\%} \left[\frac{1}{2}100 + \frac{1}{2}100 \right].$$

De igual manera determinamos los precios para los restantes nodos de tiempo $t = 3$.

					100
				88,94	100
				91,91	100
				94,11	100
				95,72	100
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	

Usando el mismo procedimiento determinamos que el precio del bono cupón cero es $P(0, 4) = 76,53$. La figura (5.3) muestra como se obtuvo este valor, por ejemplo para el nodo $N(2, 2)$ el valor está dado por

$$82,33 = e^{-9,4\%} \left[\frac{1}{2}88,94 + \frac{1}{2}91,91 \right].$$

					100
				88,94	100
		82,33	91,91		100
	78,62	86,94	94,11		100
76,53	84,01	90,41	95,72		100
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	

Figura 5.3: Precio de un Bono Cupón Cero con vencimiento en $t = 4$.

Precio de un Bono con cupón

El precio de un bono con cupon $c = 7\%$ cuyo valor nominal es 100 y vencimiento $t = 6$ asumiendo idénticas suposiciones que en el ejemplo anterior es de $P(0,6,7\%) = 98,44$. La figura (5.4) muestra como alcanzamos dicho resultado

						107
					110,28	107
			92,03	108,86		107
		92,08	99,28	106,93		107
	94,82	100,83	104,90	104,31		107
	99,44	104,47	107,72	109,16	100,78	107
98,44	109,60	112,13	113,01	112,34	96,10	107
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$

Figura 5.4: Precio de un Bono Cupón 7% con vencimiento en $t = 6$.

En este caso, debido al pago de cupón el valor en el nodo $N(2,2)$ es de la forma

$$94,82 = 7 + e^{-9,4\%} \left[\frac{1}{2}92,08 + \frac{1}{2}100,83 \right].$$

Otra forma de calcular el precio es la que se mencionó en la formula (2.3), es decir, utilizar la condición de no arbitraje y realizar una estrategia de inversión con bonos cupón cero que repliquen el flujo de pago del bono con cupón. Para este bono en particular el flujo es de la forma:

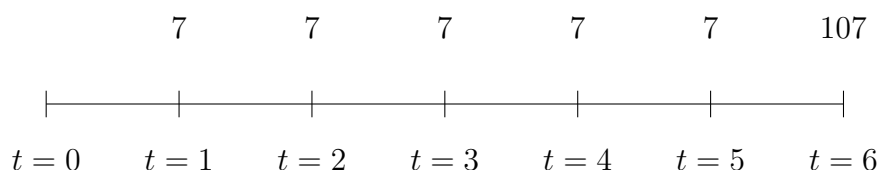


Figura 5.5: Flujo de inversión en un Bono con Cupón 7% con vencimiento en $t = 6$.

Por lo tanto se tiene que comprar 0,07 unidades de bonos cupón cero con vencimientos en $t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 1,07 unidades de un bono cupón cero con vencimiento en $t = 6$. La siguiente tabla representa los precios de los bonos cupón cero para $t = 0$ (cada uno calculado con su árbol correspondiente). A su vez se presenta la tasa de interés deducida del precio calculado.

T	$P(0, T)$	$r(0, T)$
1	94,18	6,0%
2	88,30	6,2%
3	82,40	6,5%
4	76,53	6,7%
5	70,73	6,9%
6	65,04	7,2%

Aplicando (2.3) obtenemos el precio del bono con cupón

$$98,44 = \sum_{t=1}^{t=5} 0,07P(0, t) + 1,07P(0, 6).$$

Opciones sobre Bonos a partir del Árbol Binomial

En esta sección definiremos la forma de calcular opciones financieras sobre los bonos a partir de los precios de los bonos calculados en la sección anterior.

Opción CALL Europea sobre un bono cupón cero

Si queremos calcular el precio de una Opción CALL Europea con vencimiento en $t = 2$ para el precio pactado $K = 84$ sobre un bono cupón cero con vencimiento en $t = 4$ (calculado previamente en la figura 5.3). En este caso, en $t = 2$ el pago de la opción CALL es de la forma $\max\{P(0, 2) - 84, 0\}$, luego utilizando la formula (5.1) encontramos que el precio de la opción es 2,73.

			0,00
		1,37	2,94
	2,73	4,43	6,41
$t = 0$	$t = 1$		$t = 2$

Figura 5.6: Precio de una Opción CALL Europea.

Opción PUT Americana sobre un bono cupón cero

En este caso queremos calcular el precio de una Opción PUT Americana con vencimiento en $t = 3$ para el precio pactado $K = 84$ sobre un bono cupón cero con vencimiento en $t = 4$. En este caso, en $t = 3$ el pago de la opción PUT es de la forma $\max\{84 - P(0, 3), 0\}$, luego utilizando la formula (5.1) con la adaptación de que se puede ejercer la opción en cualquier momento, encontramos que el precio de la opción es 7,47.

				0,00
			1,67	0,00
		5,48	0,00	0,00
	7,47	0,00	0,00	0,00
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

Figura 5.7: Precio de una Opción PUT Americana.

El valor del nodo $N(2, 2)$ se obtiene de la forma

$$1,67 = \max \left\{ 84 - 82,33, e^{-9,4\%} \left[\frac{1}{2}0,00 + \frac{1}{2}0,0 \right] \right\}.$$

De forma análoga se puede obtener el valor de opciones Europeas y Americanas para los bonos con cupón.

Ecuaciones Forward

En esta sección presentaremos una forma alternativa de obtener los precios de los bonos conocida como ecuaciones forward, las cuales utilizaremos para calibrar el modelo Black Derman Toy, pero primero debemos definir precio elemental dentro de un árbol binomial.

Llamaremos precio elemental $P^e(N(m, n), N(i, j))$ al precio de un activo que paga \$1 en el nodo $N(i, j)$ dado que se encuentra en el nodo $N(m, n)$ y cero en cualquier otro nodo. Las ecuaciones forward representan la relación existente entre los precios elementales en distintos momentos

del tiempo, por ejemplo, $P^e(N(m, n), N(i + 1, j))$ es igual a

$$\begin{cases} q_d P^e(N(m, n), N(i, 0)) e^{-r_{i,0} \Delta t} & j = 0. \\ q_u P^e(N(m, n), N(i, j - 1)) e^{-r_{i,j-1} \Delta t} + q_d P^e(N(m, n), N(i, j)) e^{-r_{i,j} \Delta t} & 0 < j < i + 1. \\ q_u P^e(N(m, n), N(i, i)) e^{-r_{i,i} \Delta t} & j = i + 1. \end{cases}$$

donde por definición $P^e(N(m, n), N(m, n)) = 1$.

Utilizando el árbol binomial para la tasa instantánea $r(t)$ presentado en la figura (5.2) con $\Delta t = 1$, se pueden calcular todos los precios elementales $P^e(N(0, 0), N(i, j))$ de manera sencilla utilizando las ecuaciones forward, como se muestra a continuación

					0,02
				0,04	0,10
			0,10	0,18	0,22
		0,22	0,31	0,29	0,23
	0,47	0,44	0,31	0,20	0,12
1	0,47	0,22	0,11	0,05	0,02
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$

Figura 5.8: Árbol Binomial para los precios elementales.

El valor del precio elemental en el nodo $N(3, 2)$ se obtiene de la forma

$$0,31 = \frac{1}{2} \cdot 0,22 e^{-9,4\%} + \frac{1}{2} \cdot 0,44 e^{-6,8\%}.$$

Intuitivamente si estamos en el nodo $N(0, 0)$ y sumamos todos los precios elementales para un mismo período $t = T$, dicho valor debería coincidir con el precio de un bono cupón cero con vencimiento en T , matemáticamente

$$P(0, T) = 100 \cdot \sum_{j=0}^{j=T} P^e(N(0, 0), N(T, j)). \quad (5.2)$$

Por ejemplo, el precio de un bono cupón cero con vencimiento $T = 4$ es

$$76,53 = 100 \cdot (0,05 + 0,20 + 0,29 + 0,18 + 0,04).$$

El mismo coincide con el calculado anteriormente.

En la práctica se suelen conocer todos los precios de los bonos cupón cero en tiempo $t = 0$ ($P(0, t) \forall t \in (0, T]$), es decir, conocemos las tasas de interés $r(0, t) \forall t$ incluyendo la tasa

instantánea $(r_{0,0})$. Por lo tanto, debemos calibrar el árbol binomial para la tasa instantánea $r_{i,j}$ (que es desconocida cuando $t > 0$) de forma que se ajuste a los precios conocidos. Para realizar esto, supondremos un modelo para la tasa instantánea $r(t)$, lo cual introduciremos en el próximo capítulo, y utilizamos los precios elementales junto con las ecuaciones forward dado que la suma de los precios elementales para cada tiempo i es igual a los precios de los bonos cupón cero con dicho vencimiento.

Modelo para la tasa instantánea $r(t)$

En este capítulo presentaremos un resumen de distintos métodos para estimar la tasa instantánea $r(t)$. Asumiremos que la dinámica de la tasa instantánea r es especificada bajo una medida martingala \mathbb{Q} y que el movimiento browniano generado $W^{\mathbb{Q}}$ es unidimensional ($d = 1$). En este sentido, los modelos considerados en este capítulo están basados en una sola fuente de incertidumbre, es por esta razón que estos modelos se denominan de un solo factor. Dichos modelos parten siempre de una ecuación diferencial estocástica que usualmente es de la forma:

$$dr(t) = A(r(t), t)dt + B(r(t), t)dW^{\mathbb{Q}}(t), \tag{6.1}$$

donde A y B se eligen adecuadamente y $W^{\mathbb{Q}}$ es un movimiento browniano.

En la literatura [23] [24] existen dos aproximaciones distintas para replicar la dinámica de la evolución de las tasas de interés: los métodos de equilibrio y los métodos de no arbitraje. La distinción entre ellos procede del input que se utiliza para calibrar los parámetros del modelo. Los modelos de equilibrio, entre los que se enmarcan los propuestos por Vasicek (1977) [25] y Cox, Ingersoll y Ross (1985) [7], se estiman a partir de datos históricos y los mismos se suponen constantes en el tiempo.

Los modelos de no arbitraje ajustan el precio de mercado de los activos subyacentes con el precio que proporciona el modelo. Algunos de estos modelos son los propuestos por Ho y Lee (1986)[12], Hull y White (1990)[14], Black, Derman y Toy (1990) [3], Black y Karasinski (1991)[4]. Esta aproximación es la preferida por los profesionales para valorar los derivados de tasas de interés, ya que éstas aseguran que los precios de mercado de los bonos coincidan con los proporcionados por el modelo en el momento de calibración. En cambio, los modelos de equilibrio no valoran con exactitud dichos bonos. La siguiente tabla resume los modelos mencionados anteriormente:

Vasicek	$dr(t) = (\theta - \alpha r(t))dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)$
Cox-Ingersoll-Ross	$dr(t) = (\theta - \alpha r(t))dt + \sqrt{r(t)}\sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)$
Ho-Lee	$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)$
Hull-White	$dr(t) = (\theta(t) - \alpha r(t))dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$
Black-Derman-Toy	$d \ln r(t) = (\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r(t))dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$
Black-Karasinski	$d \ln r(t) = (\theta(t) - \phi(t) \ln r(t))dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$

Modelo Black-Derman-Toy

El modelo que desarrollaremos fue introducido por Fisher Black, Emanuel Derman y Bill Toy (*BDT*), originalmente desarrollado para utilizarse dentro de Goldman Sachs en los años 80, y fue publicado por Financial Analysts Journal en 1990.

El modelo BDT parte de tres hipótesis básicas

- El modelo *BDT* es de un factor, es decir, la tasa instantánea $r(t)$ es la única variable que determina los precios de todos los activos; los rendimientos están perfectamente correlacionados y $r(t)$ se distribuye lognormal.

- Estamos en un mundo neutral al riesgo, es decir, existe una medida martingala \mathbb{Q} ; no existen impuestos ni costos de transacción en el mercado.
- Los input del modelo son la curva cupón cero y la estructura temporal de volatilidades; y la misma sólo depende del tiempo y no del valor de la tasa instantánea $r(t)$.

Se puede mostrar que bajo las hipótesis del modelo *BDT*, la tasa instantánea $r(t)$ es de la forma

$$r(t) = U(t)e^{\sigma(t)W(t)}, \quad (6.2)$$

siendo $W(t)$ un movimiento Browniano, es decir, es la parte de la ecuación que define el movimiento estocástico del tipo de interés.

Para obtener la forma estándar del modelo *BDT*, primero tomamos el logaritmo natural de la ecuación (6.2)

$$\ln r(t) = \ln U(t) + \sigma(t)W(t). \quad (6.3)$$

Luego diferenciando (por lema de Ito), se obtiene:

$$d \ln r(t) = \frac{\partial \ln U(t)}{\partial t} dt + \sigma(t)dW(t) + W(t)\sigma'(t)dt. \quad (6.4)$$

Despejando $W(t)$ de (6.3) y reemplazando en (6.4), tenemos

$$d \ln r(t) = \left(\frac{\partial \ln U(t)}{\partial t} + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} [\ln r(t) - \ln U(t)] \right) dt + \sigma(t)dW(t). \quad (6.5)$$

Definiendo $\theta(t)$ de la forma

$$\theta(t) = \frac{\partial \ln U(t)}{\partial t} - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln U(t). \quad (6.6)$$

Incorporando la definición (6.6) dentro de (6.5) se obtiene el modelo estándar del *BDT*

$$d \ln r(t) = \left(\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r(t) \right) dt + \sigma(t)dW(t). \quad (6.7)$$

Se puede apreciar que el modelo *BDT* es un caso particular del modelo Black-Karasinski (*BK*) cuando $-\phi(t) = \sigma'(t)/\sigma(t)$. El modelo *BK* tiene reversión a la media por lo tanto es de esperar que si $\sigma'(t) < 0$ (implica que la función $\sigma(t)$ es decreciente), el modelo *BDT* para la tasa instantánea $r(t)$ tendrá reversión a la media.

La función (6.7) es equivalente a

$$d \ln r(t) = \gamma(t)dt + \sigma(t)dW(t). \quad (6.8)$$

La ventaja de presentar el modelo de la forma (6.8) es que permite entender algunos supuestos implícitos en el modelo. El modelo *BDT* incorpora dos funciones dependientes del tiempo, $\gamma(t)$ y $\sigma(t)$, los cuales son escogidos de forma tal que el modelo se ajusta a la curva de rendimientos y a su respectiva volatilidad.

Desafortunadamente, debido a la lognormalidad, no existen soluciones analíticas para el modelo, por lo que se requieren procedimientos numéricos. El enfoque a utilizar para valorizar derivados de la tasa de interés consiste en discretizar el modelo continuo y trabajar con árboles binomiales sobre la tasa instantánea que deberán ser construidos hasta el vencimiento del instrumento subyacente al derivado. Se supone que la curva de rendimiento ($r(0, t) \forall t$) y la curva de volatilidad ($\sigma_R(0, t) \forall t$) vigentes en $t = 0$ ya han sido especificadas, es decir, ya se han determinado los precios de los bonos cupón cero y sus volatilidades asociados para cada Δt .

Calibración del modelo BDT

En esta sección se indicará como calibrar la estructura de la tasa instantánea [15] bajo los supuestos del modelo *BDT*, es decir, la forma de la tasa instantánea en tiempo t es

$$r(t) = U(t)e^{\sigma(t)W(t)}. \quad (6.9)$$

El primer paso es discretizar el modelo continuo mediante un árbol binomial, para ello partimos la unidad de tiempo en N períodos iguales de tamaño $\Delta t = 1/N$. Para el período n correspondiente al tiempo $t = n/N = n\Delta t$ hay $n + 1$ estados, cada estado se encuentra en el rango $j = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$. Definimos n variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n de la forma

$$\begin{cases} x_n = 1 & \text{si ocurre un movimiento hacia arriba en el período } n. \\ x_n = -1 & \text{si ocurre un movimiento hacia abajo en el período } n. \end{cases} \quad (6.10)$$

Asumimos que las variables aleatorias x_n son independientes con probabilidad $\mathbb{P}[x_n = 1] = \mathbb{P}[x_n = -1] = 1/2$. Ahora definimos $X_n = \sum_{j=1}^n x_j$ que nos determina el nivel de la tasa instantánea en tiempo $n\Delta t$. En cualquier período n , la variable aleatoria X_n tiene distribución binomial con media 0 y varianza n . Ahora la media y la varianza de la variable aleatoria $X_n\sqrt{\Delta t}$ son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n\sqrt{\Delta t}] &= \sqrt{\Delta t}\mathbb{E}[X_n] = 0, \\ \mathbb{V}[X_n\sqrt{\Delta t}] &= \Delta t\mathbb{V}[X_n] = n\Delta t = t. \end{aligned}$$

Entonces $X_n\sqrt{\Delta t}$ tiene la misma esperanza y varianza que el movimiento browniano $W(t)$. Dado que la distribución normal es el límite de la distribución binomial, y el proceso binomial X_n tiene incrementos independientes, el proceso $X_n\sqrt{\Delta t}$ converge al movimiento browniano $W(t)$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Por lo tanto, la ecuación (6.9) en su versión discretizada es de la forma

$$r_{n,j} = U(n)e^{\sigma(n)j\sqrt{\Delta t}} \quad \text{con } j = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n. \quad (6.11)$$

es decir, reemplazamos t por n y $W(t)$ por $j\sqrt{\Delta t}$. Para determinar el árbol binomial para la tasa instantánea, necesitamos determinar $r_{n,j}$ para todo período n y para cada estado j , lo que es igual a determinar $U(n)$ y $\sigma(n) \forall n$.

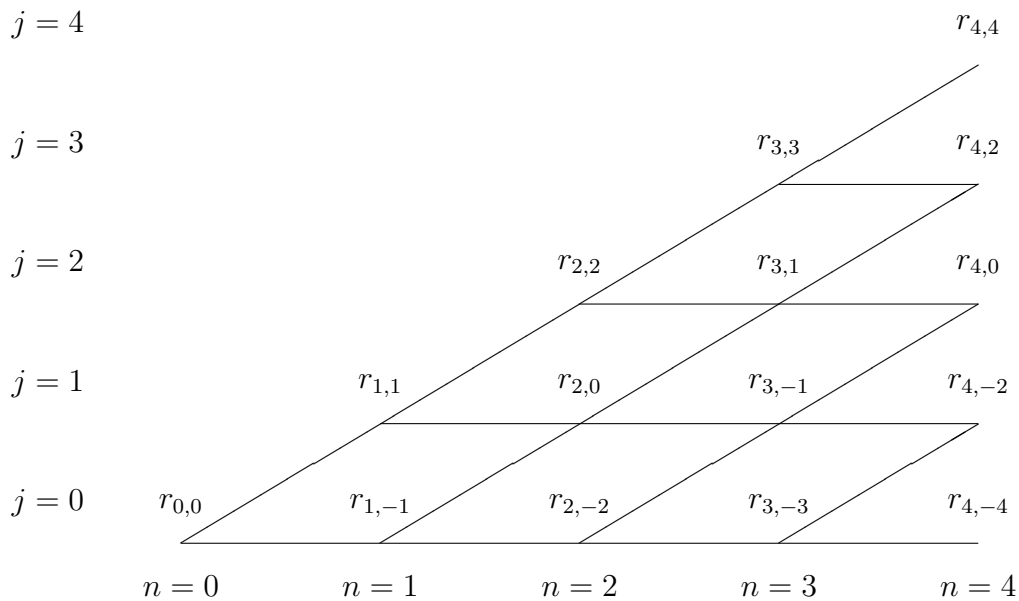


Figura 6.1: Construcción del árbol binomial para modelo BDT.

Para determinar $U(n)$ y $\sigma(n)$ iremos avanzando hacia adelante período a período utilizando las ecuaciones forward. Para un árbol binomial como el de la figura (6.1) las ecuaciones forward para el precio elemental $P^e(N(m, k), N(n + 1, j))$ son de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P^e(N(m, k), N(n, -n))e^{-r_{n,-n}\Delta t} & j = -n. \\ \frac{1}{2}P^e(N(m, k), N(n, j - 1))e^{-r_{n,j-1}\Delta t} + \frac{1}{2}P^e(N(m, k), N(n, j + 1))e^{-r_{n,j+1}\Delta t} & j = -n + 2, \dots, n - 2. \\ \frac{1}{2}P^e(N(m, k), N(n, n))e^{-r_{n,n}\Delta t} & j = n. \end{aligned}$$

donde $P^e(N(m, k), N(m, k)) = 1$.

Debido a que tenemos que determinar $U(n)$ y $\sigma(n)$ conjuntamente, ajustaremos dos árboles binomiales para los precios elementales $P^e(N(1, -1), N(n, j))$ y $P^e(N(1, 1), N(n, j))$. Denotaremos $P(1, \pm 1, n) = \sum_{j=-n}^n P^e(N(1, \pm 1), N(n, j))$ que representan los precios de un bono cupón cero con vencimiento en $t = n\Delta t$ en tiempo $t = \Delta t$, siendo $P(1, -1, n)$ el precio cuando nos encontramos en el nodo $N(1, -1)$ y $P(1, 1, n)$ el precio cuando nos encontramos en el nodo $N(1, 1)$. La figura (6.2) representa la estructura de tasas utilizada para $P(1, -1, n)$ y $P(1, 1, n)$.

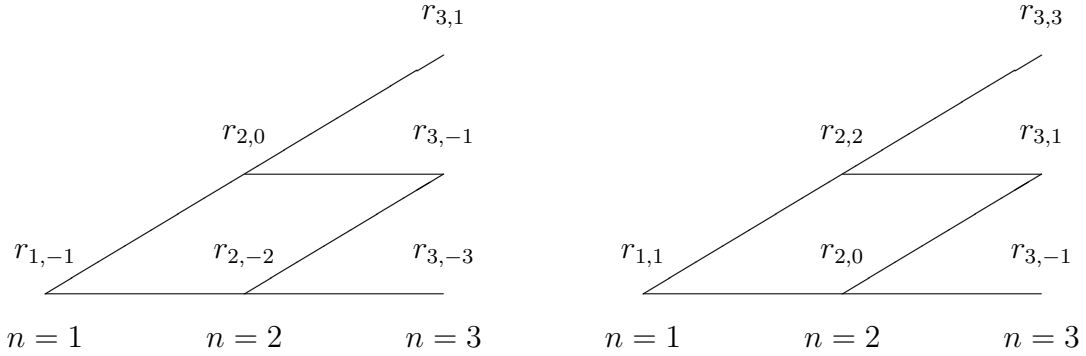


Figura 6.2: Construcción del árbol binomial para $P(1, 1, n)$ y $P(1, -1, n)$.

Utilizando el supuesto de neutralidad al riesgo presentado en la ecuación (5.1) podemos escribir

$$P(0, t) = P(0, n\Delta t) = \frac{1}{2} [P(1, -1, n) + P(1, 1, n)] P(0, \Delta t) \quad n \geq 2. \quad (6.12)$$

Para ajustar la curva de volatilidad utilizamos nuestro supuesto de que la volatilidad sólo depende del tiempo y no del valor de la tasa instantánea, por lo tanto, un movimiento hacia arriba de la tasa difiere de un movimiento hacia abajo de la siguiente forma

$$\frac{r(1, 1, n)}{r(1, -1, n)} = e^{2\sigma_R(n)\sqrt{\Delta t}}. \quad (6.13)$$

siendo $\sigma_R(n)$ la curva de volatilidad conocida, $r(1, \pm 1, n)$ las tasas de rendimiento de $P(1, \pm 1, n)$. Recordamos la relación entre $P(1, \pm 1, n)$, $r(1, \pm 1, n)$ y $P^e(N(1, \pm 1), N(n, j))$,

$$P(1, \pm 1, n) = e^{-r(1, \pm 1, n)(n-1)\Delta t} = \sum_j P^e(N(1, \pm 1), N(n, j)) \quad \text{con } j = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n.$$

Si reemplazamos (6.13) en (6.12) encontramos una solución para $r(1, 1, n)$ de la forma

$$e^{-r(0, n\Delta t)n\Delta t} = \frac{1}{2} \left[e^{-r(1, 1, n)(n-1)\Delta t} + e^{-(r(1, 1, n)e^{-2\sigma_R(n)\sqrt{\Delta t}})(n-1)\Delta t} \right] e^{-r_{0,0}\Delta t}. \quad (6.14)$$

por lo tanto, $r(1, -1, n)$ se expresa como

$$r(1, -1, n) = r(1, 1, n)e^{-2\sigma_R(n)\sqrt{\Delta t}}. \quad (6.15)$$

Esto nos permite encontrar una solución para $P(1, \pm 1, n) \forall n \geq 2$ que son los insumos necesarios para calibrar los dos árboles binomiales presentados en la figura (6.2).

Dado $U(n-1)$ y $\sigma(n-1)$ podemos ajustar inductivamente los valores de $U(n)$ y $\sigma(n)$ mediante el procedimiento:

- Determinamos $r_{n-1,j} \forall j$ utilizando los valores $U(n-1)$ y $\sigma(n-1)$.
- Utilizamos la ecuaciones forward para calcular $P^e(N(1, \pm 1), N(n, j)) \forall j$ usando los valores $r_{n-1,j}$ determinados en el punto anterior.
- Mediante las ecuaciones (6.14) y (6.15) determinamos $P(1, \pm 1, n+1)$.
- Los precios elementales $P^e(N(1, \pm 1), N(n+1, j)) \forall j$ son desconocidos debido a que no conocemos los valores de $r_{n,j} \forall j$. Reemplazamos $\sigma(n)$ según la ecuación (6.11), entonces $U(n)$ y $\sigma(n)$ son las únicas variables desconocidas.
- Mediante el algoritmo de optimización Nelder-Mead determinamos $U(n)$ y $\sigma(n)$ dado que se tiene que cumplir simultáneamente las siguientes relaciones

$$P(1, 1, n+1) = \sum_j P^e(N(1, 1), N(n+1, j)) \quad \text{con } j = -n-1, -n+1, \dots, n-1, n+1.$$

$$P(1, -1, n+1) = \sum_j P^e(N(1, -1), N(n+1, j)) \quad \text{con } j = -n-1, -n+1, \dots, n-1, n+1.$$

- Procedemos de igual manera hasta completar el árbol binomial, es decir, hasta determinar $U(n)$ y $\sigma(n) \forall n$.

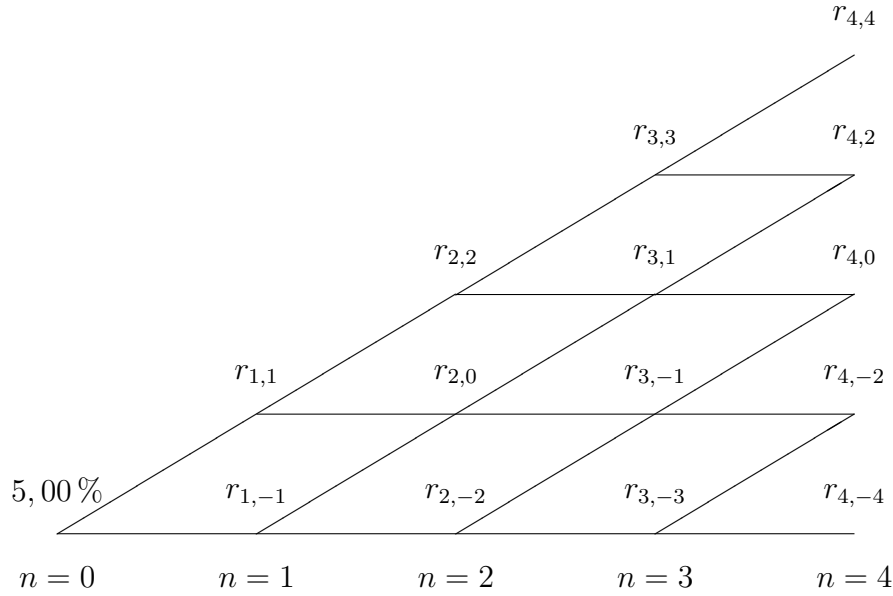
El siguiente ejemplo permitirá comprender el procedimiento descrito en el punto anterior.

Ejemplo numérico

Como ejemplo de la aplicación del modelo BDT vamos a suponer que $\Delta t = 1$, y que la estructura de la curva de rendimiento y la curva de volatilidad es la siguiente:

n	$r(0, n)$	σ_R
1	5%	NA
2	6%	14%
3	7%	13%
4	8%	12%
5	9%	11%

En $n = 0$, por definición sabemos que $r(0, 1) = r_{0,0} = 5\%$ por lo tanto $U(0) = 5\%$ dado que el valor $r_{0,0}$ es conocido el mismo no tiene volatilidad por lo tanto $\sigma(0) = NA$, entonces el árbol binomial a calibrar es de la forma:



El siguiente paso es determinar los precios elementales para los nodos $N(1, 1)$ y $N(1, -1)$ por definición los precios elementales para $n = 1$ son

$$P^e(N(1, 1), N(1, 1)) = 1.$$

$$P^e(N(1, -1), N(1, -1)) = 1.$$

Aplicando la ecuación (6.14) para $n = 2$ obtenemos que $r(1, 1, 2)$ cumple

$$e^{-2 \times 6\%} = \frac{1}{2} \left[e^{-r(1,1,2)} + e^{-(r(1,1,2)e^{-2 \times 14\%})} \right] e^{-5\%},$$

por lo tanto $r(1, -1, 2)$ se expresa como

$$r(1, -1, 2) = r(1, 1, 2)e^{-2 \times 14\%}.$$

De esta forma encontramos los precios $P(1, \pm 1, 2)$ son

$$P(1, 1, 2) = e^{-2 \times r(1,1,2)} = 0,9233$$

$$P(1, -1, 2) = e^{-2 \times r(1,-1,2)} = 0,9415$$

Como ya se mencionó anteriormente la relación entre $P(1, \pm 1, 2)$ y $P^e(N(1, \pm 1), N(2, j))$ siendo $j = -2, 0, 2$ es de la forma

$$P(1, 1, 2) = \sum_j P^e(N(1, 1), N(2, j)) \quad \text{con } j = -2, 0, 2.$$

$$P(1, -1, 2) = \sum_j P^e(N(1, -1), N(2, j)) \quad \text{con } j = -2, 0, 2.$$

Dado que la única variable desconocida en $P^e(N(1, 1), N(2, j))$ es $r_{1,1}$ esta coincide con $r(1, 1, 2)$ (dado que $P^e(N(1, 1), N(2, -2))=0$), de igual manera se determina que $r_{1,-1} = r(1, -1, 2)$.

Entonces

$$r_{1,1} = 7,98\%,$$

$$r_{1,-1} = 6,03\%.$$

Con la ecuación (6.11) encontramos que $U(1) = 6,94\%$ y $\sigma(1) = 14\%$. Dado que $r_{1,1}$ coincide con $r(1, 1, 2)$ y que $r_{1,-1}$ coincide con $r(1, -1, 2)$ es de esperar que $\sigma(1) = \sigma_R(2)$.

Una vez determinado $r_{1,1}$ y $r_{1,-1}$ podemos calcular $P^e(N(1, \pm 1), N(2, j))$ para $j = 0, 1, 2$.

Cuando $n = 3$ procedemos de la misma manera, primero encontramos los precios $P(1, \pm 1, 3)$ a partir de las tasas $r(1, \pm 1, 3)$ según las ecuaciones (6.14) y (6.15), los precios resultantes son

$$P(1, 1, 3) = e^{-3 \times r(1,1,3)} = 0,8345$$

$$P(1, -1, 3) = e^{-3 \times r(1,-1,3)} = 0,8698$$

Nuevamente encontramos que $r_{2,j}$ con $j = -2, 0, 2$ son las únicas incógnitas dentro de las ecuaciones:

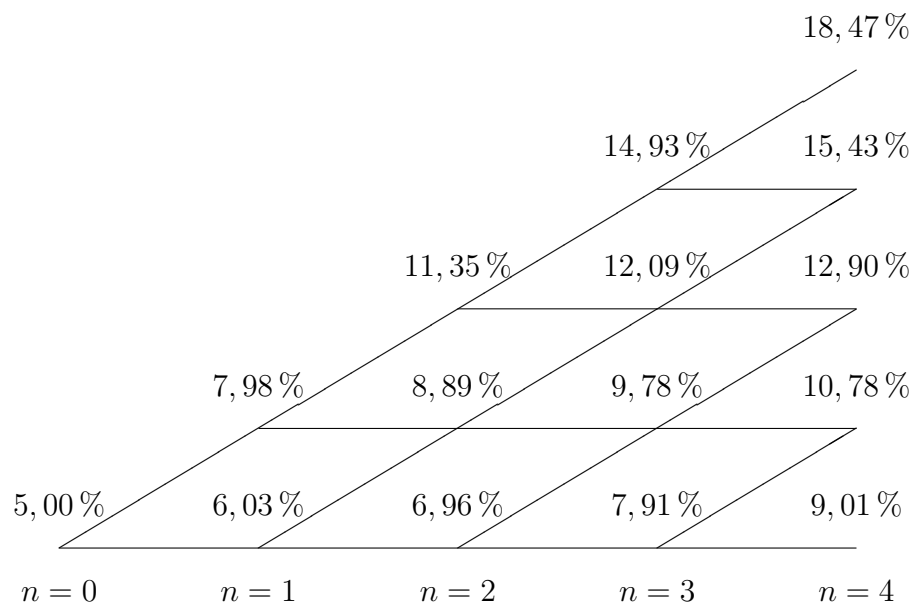
$$P(1, 1, 3) = \sum_j P^e(N(1, 1), N(3, j)) \text{ con } j = -3, -1, 1, 3.$$

$$P(1, -1, 3) = \sum_j P^e(N(1, -1), N(3, j)) \text{ con } j = -3, -1, 1, 3.$$

Si remplazamos $r_{2,j}$ con $j = -2, 0, 2$ por la definición de la ecuación (6.11), tenemos un sistema de ecuaciones no lineal con las incógnitas $U(2)$ y $\sigma(2)$, que resolvemos mediante el algoritmo de Nelder-Mead.

Entonces $U(2) = 8,89\%$ y $\sigma(2) = 12,23\%$, por lo tanto, según la ecuación (6.11) calculamos $r_{2,-2} = 6,96\%$, $r_{2,0} = 8,89\%$ y $r_{2,2} = 11,35\%$.

Procedemos de igual manera completamos el árbol binomial para la tasa instantánea obteniendo:



donde los parámetros del modelo BDT son:

n	$U(n)$	$\sigma(n)$
1	5,00 %	NA
2	6,94 %	14,00 %
3	8,89 %	12,23 %
4	10,87 %	10,58 %
5	12,90 %	8,98 %

Aplicación para el Mercado Uruguayo

Mercado Uruguayo

En esta sección presentaremos las principales características de la deuda uruguaya. Posteriormente realizaremos una breve descripción de la curva de rendimiento para el 30 de setiembre de 2014 diferenciando por moneda de emisión.

Deuda Uruguaya

Según el reporte divulgado en Octubre de 2014 por la unidad de deuda del ministerio de economía el monto de la deuda uruguaya alcanzaba los 22.202 millones de dólares en Setiembre de 2014. La deuda estaba compuesta por 2.184 millones de dólares en préstamos (10 %) y 20.018 millones de dólares en la emisión de bonos (90 %). Solamente el 29 % de la deuda uruguaya se encuentra bajo la jurisdicción uruguaya, el restante 71 % de la deuda se encuentra en una jurisdicción distinta a la uruguaya (Estados Unidos y Japón). El perfil de la deuda según vencimientos y moneda se aprecia a continuación.

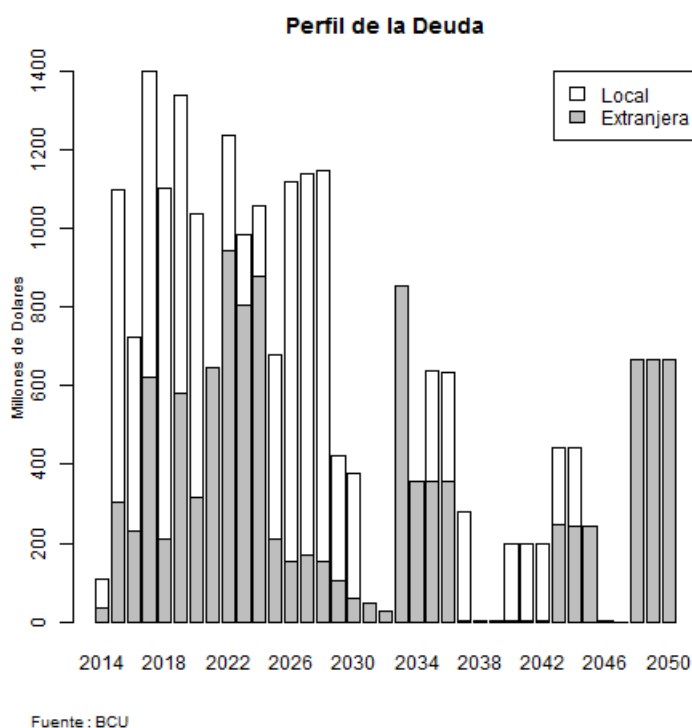


Figura 7.1: Perfil de la deuda según vencimiento y moneda.

El reporte también menciona que 920 millones de dólares (4,1%) se amortizan en menos de un año. También se aprecia que el 50,9% de la deuda está nominada en moneda local (Pesos, Unidades Indexadas y Unidades Reajustables) mientras que el restante 49,1% se encuentra en monedas extranjeras (Dólares, Euros y Yenes). La composición por monedas de la deuda ha cambiado drásticamente en los últimos 10 años como se muestra a continuación.

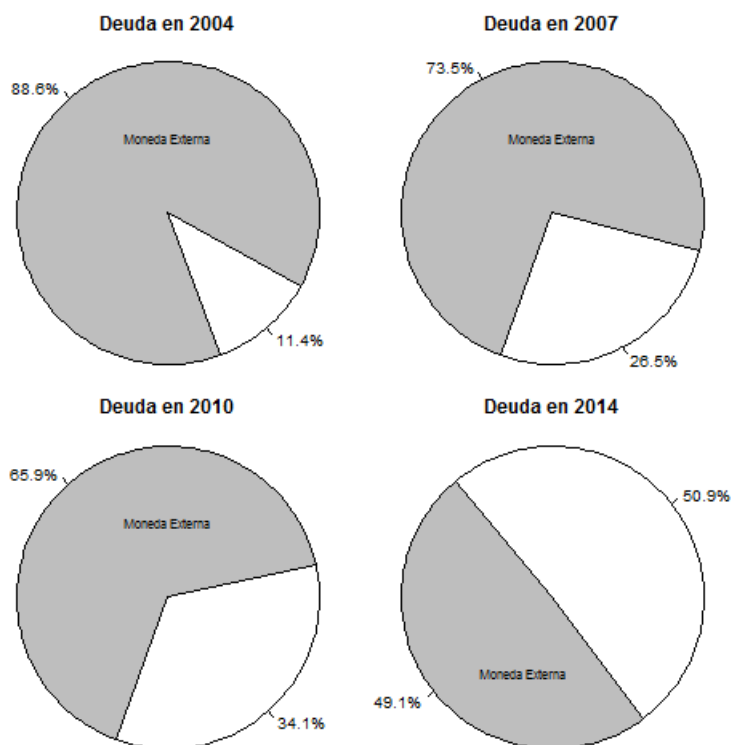


Figura 7.2: Evolución de la Deuda últimos 10 años.

En el cierre de 2004 la composición de la deuda era de 88,6% en moneda extranjera y 11,4% en moneda local, luego ocurrió un proceso de desdolarización de la deuda, el cual se observa en la figura (7.2) transformándose en el actual 50,9% de moneda local y 49,1% de moneda extranjera. Es claro que el interés que paga la deuda dependerá de la moneda de emisión de la misma, el siguiente cuadro muestra la tasa de interés promedio de cada moneda

Moneda de Emisión	Interés promedio
Dolar	5,3
Euros	5,9
Yens	1,9
Unidad Indexada	4,0
Unidad Reajutable	2,3
Pesos	9,6

Como se aprecia en la tabla anterior la deuda uruguaya está compuesta por seis distintas monedas (Dolar, Euros, Yen, Unidad Indexada, Unidad Reajutable y Pesos), sin embargo en la práctica solamente contamos con curva de rendimientos para las monedas Dolar, Unidad Indexada y Pesos.

Curvas de Rendimiento

Actualmente la Bolsa de Valores de Montevideo (BVM) y la Bolsa Electrónica de Valores (BEV-SA) publican diariamente en sus páginas web curvas de rendimiento para la deuda Uruguaya. La BVM elaboró conjuntamente con CPA-Ferrere un modelo para la curva de rendimiento para la deuda nominada en Unidades Indexadas, denominada Curva UI BVM-CPA, la cual utiliza el ajuste planteado por Svensson y cuenta con datos históricos desde 2012. En la figura (7.3) se observan los parámetros del ajuste de la curva para el 30 de Setiembre de 2014, para la cual se observa una pendiente negativa, ésta situación ocurre cuando los inversores esperan que los rendimientos futuros sean menores a los actuales.

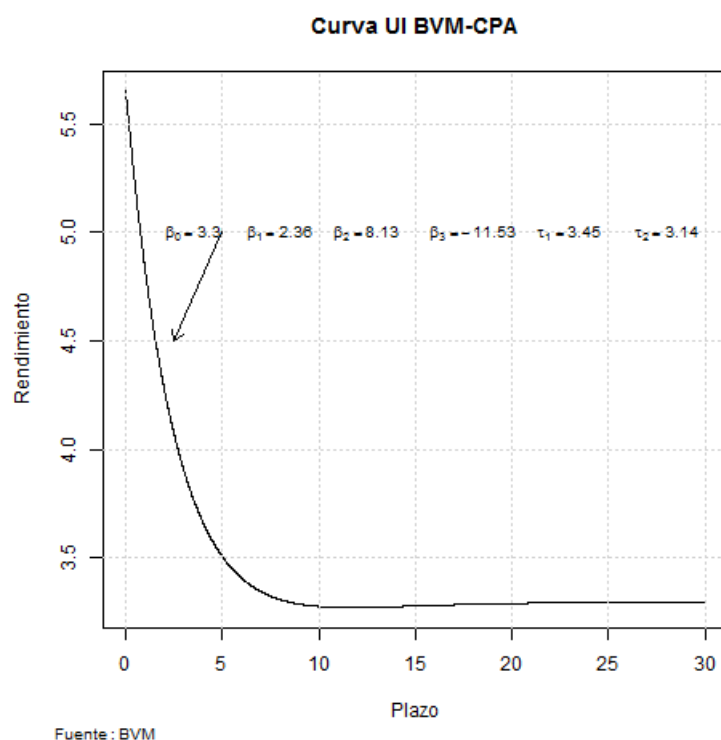


Figura 7.3: Curva UI BVM-CPA para el 30 de Setiembre 2014.

En cambio BEVSA, construyó tres curvas de rendimientos de la deuda soberana uruguaya, nominadas en dólares, pesos y unidades indexadas denominadas CUD, ITLUP y CUI. Para su elaboración BEVSA utilizó el ajuste mediante spline cúbicos, y los datos históricos se remontan hasta Octubre de 2003. La figura (7.4) muestra los valores publicados por BEVSA de las distintas curvas de rendimiento de la deuda soberana para el 30 de Setiembre de 2014. Debido a que BEVSA no publica los nodos utilizados en las splines cúbicas no podemos reproducir exactamente la curva para cualquier plazo.

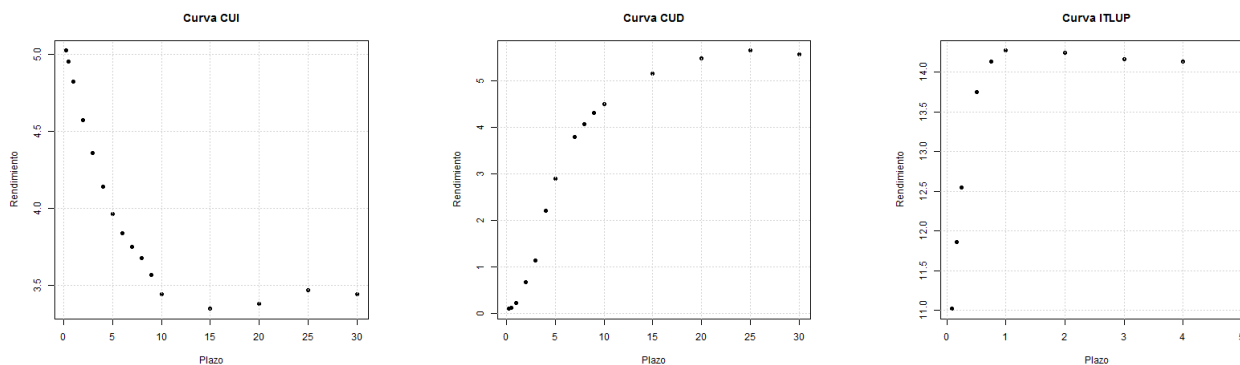


Figura 7.4: Curvas CUI, CUD, ITLUP para el 30 de Setiembre 2014.

Como era de esperar se observa una curva con pendiente negativa en la curva CUI, similar a lo observado en la curva UI BVM-CPA. Sin embargo las curvas CUD y ITLUP presentan pendientes positivas, es decir, los inversores esperan un premio superior por invertir a largo plazo dado que el riesgo de la inversión es mayor. Utilizando estas curvas de rendimiento y argumentos de arbitraje un inversionista puede extraer las expectativas del mercado sobre la inflación y tipo de cambio. Con estas expectativas de mercado y sus propias expectativas realizará una estrategia de inversión.

Expectativas de Mercado

Al igual que otros bancos centrales, el Banco Central del Uruguay (BCU) elabora una encuesta de expectativas de las principales variables macroeconómicas, de modo de complementar la información disponible para el diseño de la política monetaria. Con ese fin se encuesta mensualmente a instituciones y profesionales independientes considerados formadores de opinión en la materia.

La encuesta contiene preguntas sobre variables claves como el crecimiento, variación del empleo, resultado fiscal, tipo de cambio e inflación. Las preguntas sobre las expectativas de inflación sirven también para evaluar la inflación esperada en el horizonte de la meta del BCU, dado que la tasa de inflación posiblemente será influida por las expectativas de la misma. Además, las expectativas inflacionarias de mediano plazo, sirven en la evaluación de la credibilidad que el BCU tiene entre los distintos agentes.

La mediana de la opinión de los expertos en el mes de Octubre de 2014 para la inflación (π) y el tipo de cambio (TC) era la siguiente:

período	π	TC
año calendario	8,60	24,50
próximo semestre	4,15	25,00
próximos 12 meses	8,20	25,90

Las expectativas de mercado y las estrategias de inversión

Es importante resaltar el papel de las expectativas de mercado en las estrategias de inversión, dado que de las mismas un inversor puede definir o cambiar su estrategia de inversión en base a los riesgos.

Un ejemplo sencillo del uso de las expectativas es cuando un inversor cuenta con un capital para invertir en activos nominados en moneda nacional y moneda extranjera cuyos plazos y riesgos son similares (por ejemplo, la deuda soberana uruguaya). Supongamos que un inversor tiene un millón de dólares para invertir en un mercado donde solamente existen dos bonos cupón cero, un emitido en dólares ($P_{USD}(t, T)$) y otro emitido en pesos ($P_{UYU}(t, T)$) cuyos vencimientos son un año exactamente. Suponemos que los precios en $t = 0$ de los bonos (cuyos valores nominales son 100) son $P_{USD}(0, 1) = 99,75$ y $P_{UYU}(0, 1) = 86,94$ respectivamente, es decir, la tasa de interés en dólares es 0,25% y la tasa de interés nominal (o en pesos) es 14,00%. Otro dato relevante es el tipo de cambio en $t = 0$, el cual suponemos que es igual a 24.

Por la condición de no arbitraje es de esperar que la rentabilidad medida en pesos de invertir en cualquiera de los bonos sea la misma, dado que ambos activos producen el mismo flujo de efectivo y tienen el mismo riesgo de crédito (ambos son bonos soberanos), solo se diferencian en la moneda de emisión. De esta forma si invertimos un millón de dólares en el bono cupón cero en dólares dentro de un año obtenemos 1,002,503,13 de dólares, en cambio si invertimos el millón de dólares en el bono cupón cero en pesos (invertimos 24 millones de pesos) obtenemos dentro de un año 27,606,571,17 pesos. Por la condición de no arbitraje descrita anteriormente si vendiéramos los dólares dentro de un año deberíamos tener exactamente la misma cantidad de pesos que si invertimos directamente en los pesos, en nuestro ejemplo el tipo de cambio esperado que equilibra las inversiones es de 27,538.

Este valor no tiene porque coincidir con las expectativas de mercado realizadas por los especialistas en la materia. Si suponemos que las expectativas de mercado sitúan al tipo de cambio dentro de un año en 26 pesos y el inversionista entiende que las expectativas están en lo correcto, entonces pueden pasar dos situaciones, o la tasa de interés en dólares sube provocando una caída de precios en dólares o la tasa de interés nominal baja provocando un aumento de precios en pesos.

Estos posibles cambios en las tasas de interés afectan directamente los precios de los bonos aumentando los riesgos de inversión, es por esta razón, que una estrategia con instrumentos de cobertura como las opciones disminuyen los riesgos de los portafolios.

Input del modelo

Debido a las características de la deuda soberana uruguaya presentadas anteriormente, se decidió modelar la tasa instantánea $r(t)$ diferenciando según la moneda de emisión de la deuda. Es por esta razón, que calibraremos tres árboles binomiales para $r(t)$ utilizando como insumo los datos de las curvas de rendimiento CUD, ITLUP y CUI elaboradas por BEVSA para la deuda soberana uruguaya.

Por convención se estableció que cada año tiene 365 días y que $\Delta t = 1/365$, es decir, un día. Se decidió por trabajar con bonos soberanos cuyo vencimiento sea menor a los 5 años (1825 días).

Curvas de Rendimiento y Volatilidad

Para calibrar los modelos necesitamos especificar la curva de rendimiento ($r(0, t) \forall t \in [0, T]$) y la curva de volatilidad ($\sigma_R(t) \forall t \in [0, T]$) vigentes en $t = 0$ siendo $T = 5$ años. Para el ajuste de la curva de rendimiento, se utilizaron los métodos Nelson-Siegel y Svensson para los datos de mercado del 30 de Setiembre de 2014, los ajustes de las curvas son presentados en la figura (7.4). Los parámetros ajustados se presentan en la siguiente tabla:

Parámetros	ITLUP	CUD	CUI
β_0	15,95	20,81	1,71
β_1	-5,43	-20,67	3,38
β_2	-5,37	-21,96	1,18
β_3	-5,51		
τ_1	0,08	3,85	3,95
τ_2	2,84		

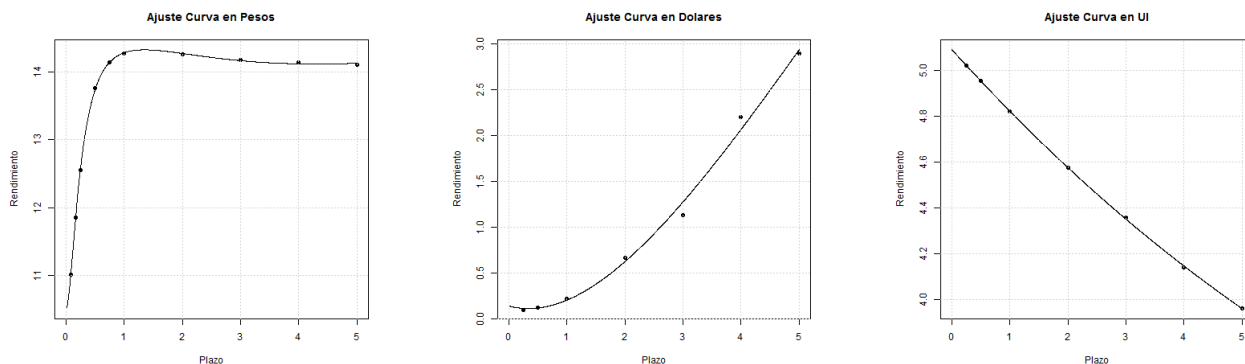


Figura 7.5: Ajuste de las Curvas de Rendimiento para el 30 de Setiembre 2014.

Para determinar la curva de volatilidad utilizamos la serie histórica elaborada por BEVSA para el período comprendido entre el 1 de Octubre de 2013 y 30 de Setiembre de 2014. En primer lugar, ajustamos los datos mediante el método de Svensson para cada día de la muestra.

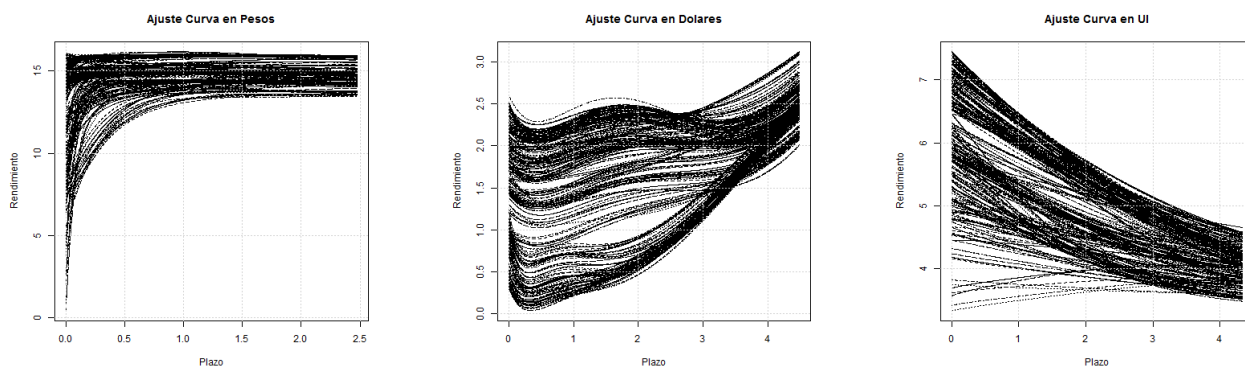


Figura 7.6: Ajuste de las Curvas de Rendimiento para la serie histórica.

Luego para cada plazo estipulado utilizamos los logaritmos de los rendimientos entre dos días consecutivos, a los cuales le calculamos el desvío estándar y lo dividimos por la raíz cuadrada de $1/252$, que es el inverso de un año considerando días hábiles. Las curvas de volatilidad resultantes se presentan a continuación:

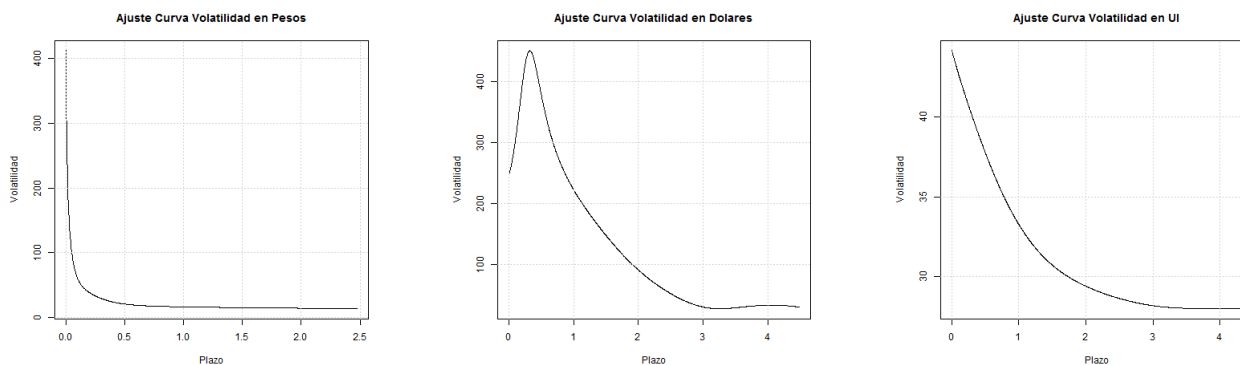


Figura 7.7: Estimación de las Curvas de Volatilidad para el 30 de Setiembre 2014.

Bonos de Referencia

Para el cálculo de las opciones financieras se tomaron como referencia tres bonos emitidos por el Gobierno Uruguayo por ser considerados títulos con alto circulante, liquidez de mercado y vencimiento menor a 5 años.

Las principales características de los bonos son:

Nemotécnico	BL190323F	N.T UI-S16	N.T \$-S5
Emisión	29/05/2003	27/01/2011	31/03/2012
Vencimiento	23/03/2019	27/01/2019	21/03/2017
Moneda	Dólares	Unidades Indexadas	Pesos
Circulante (MO)	280,5 millones	6.000 millones	4.000 millones
Cupón	7,5	3,25	11
Pago Interés	Semestral		
Amortización	Al vencimiento		
Jurisdicción	Uruguay		

Los precios de los bonos y su respectiva tasa de rendimiento al vencimiento (y_t^c) para el 30 de Setiembre de 2014 según los input del modelo se presentan a continuación:

Nemotécnico	$P(0, T)$	y_t^c
BL190323F	121,96	2,33 %
N.T UI-S16	97,04	4,10 %
N.T \$-S5	92,77	14,21 %

Como se observa en la tabla anterior la tasa de rendimiento al vencimiento del bono BL190323F $y_t^c = 2,33\%$ es bastante inferior al cupón que paga, esto se refleja en el precio del mismo el cual es bastante superior a la par ($VN = 100$). Lo opuesto ocurre con los bonos N.T UI-S16 y N.T \$-S5 sus tasas de rendimiento al vencimiento son superiores al cupón que pagan, $y_t^c = 4,10\%$ y $y_t^c = 14,21\%$ respectivamente, esto se refleja con un precio por debajo de la par.

Resultados

En esta sección presentaremos los precios de las opciones sobre los bonos de referencia, calcularemos opciones CALL y PUT tanto Europeas como Americanas para los plazos 3 meses, 6 meses y 1 año. Como precio pactado de la opción, tomamos los precios calculados para los plazos estipulados para cada bono utilizando el y_t^c actual mas menos un rango que varia entre -2% y 2% . Definimos el precio pactado de esta forma debido a que el precio del bono depende de la amortización y del pago de cupones. Recordamos que la tasa y_t^c verifica la ecuación

$$P(t, T, c) = \sum_{i=0}^j c_i e^{-y_t^c (T_i - t)},$$

siendo $c = [c_1, \dots, c_j]$ el vector de amortizaciones y pagos de cupones y $T = [T_1, \dots, T_j]$ las fechas de pago.

Bono N.T \$-S5 nominado en Pesos

El primer paso para obtener los precios de las opciones es determinar la tasa de interés instantánea $r(t)$ bajo los supuestos del modelo Black-Derman-Toy (BDT), es decir, calibrar un árbol binomial para $r_{n,j} = U(n)e^{\sigma(n)j\sqrt{\Delta t}}$ con $j = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$. siendo n la cantidad de días entre el 30 de Setiembre de 2014 y la fecha de vencimiento del bono (21/03/17).

El ajuste de $U(n)$ y $\sigma(n)$ se presentan a continuación

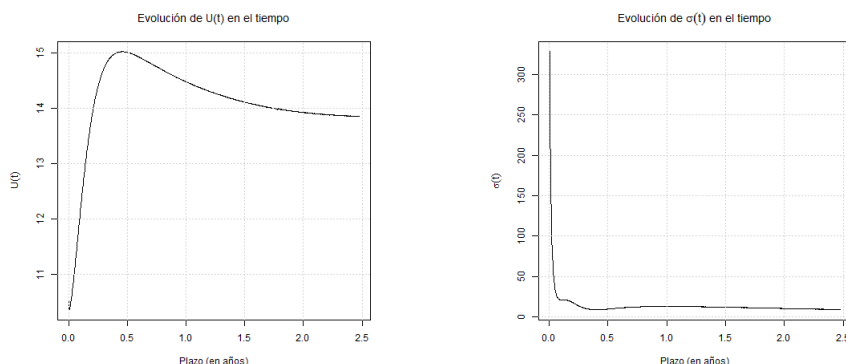


Figura 7.8: Ajuste de $U(n)$ y $\sigma(n)$ para el Bono N.T.\$-S5 nominado en Pesos.

Posteriormente se ajusta el árbol binomial para el precio del bono N.T.\$-S5 nominado en Pesos, el cual representa los posibles precios en cada instante de tiempo determinados por el modelo. Luego calculamos los precios pactados según los valores de y_t^c como se mencionó anteriormente, y por último, se ajustan árboles binomiales para cada tipo de opción y plazo estipulado determinando el precio de la misma.

Recordamos que una opción es un contrato a través del cual, el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar (CALL) o vender (PUT) un activo a un precio pactado (K) en una fecha futura (T_1). Existen dos grandes grupos de opciones: americanas y europeas. Una opción europea solo puede ser ejecutada en la fecha de vencimiento, en cambio, una opción americana puede ser ejecutada en cualquier momento antes de su vencimiento.

Por ejemplo, el comprador de una opción CALL europea paga una prima de 1,57, el 30 de Septiembre de 2014, para obtener el derecho de comprar el 31 de Diciembre de 2014, el bono N.T.\$-S5 a un precio 94,24. Si el precio del bono N.T.\$-S5 al 31 de Diciembre de 2014 ($P(T_1, T, c)$) es superior a 94,24, el inversor ejerce la opción, es decir, compra el bono a 94,24 y luego lo vende al precio de mercado a precio $P(T_1, T, c)$, lo que da un resultado de $P(T_1, T, c) - 94,24$. En caso de que el precio del bono $P(T_1, T, c)$ sea inferior a 94,24 el inversor no ejerce la opción, dado que es mejor comprar el bono directamente en el mercado, por lo cual el resultado es 0.

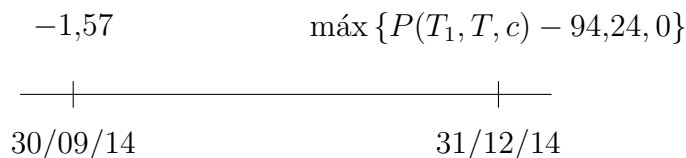


Figura 7.9: Resultado de inversión de una Opción CALL Europea.

Los precios de las distintas opciones se presentan a continuación:

Opciones Europeas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2 %	99,98	0,00	4,13	97,51	0,02	3,51	98,16	0,08	2,39
-1 %	98,02	0,04	2,27	95,75	0,15	1,99	96,79	0,30	1,42
0 %	96,11	0,43	0,81	94,02	0,64	0,87	95,45	0,77	0,73
1 %	94,24	1,57	0,14	92,33	1,63	0,27	94,13	1,51	0,32
2 %	92,41	3,21	0,01	90,66	2,97	0,06	92,82	2,44	0,12

Opciones Americanas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2 %	99,98	0,00	7,21	97,51	1,60	4,75	98,16	2,34	5,39
-1 %	98,02	0,04	5,26	95,75	3,03	2,98	96,79	3,43	4,03
0 %	96,11	0,43	3,35	94,02	4,61	1,26	95,45	4,57	2,68
1 %	94,24	1,57	1,48	92,33	6,20	0,34	94,13	5,72	1,36
2 %	92,41	3,21	0,11	90,66	7,76	0,08	92,82	6,85	0,51

Un inversor que cuente con esta información y que considere que el mercado es volátil podría optar por opciones Americanas, las cuales pueden ser ejercidas en cualquier momento antes del vencimiento de la opción. Dicho inversor podría utilizar estrategias complejas como staddles comprada o strangles comprada, en ambos casos la estrategia consta de comprar una opción CALL y una opción PUT. En la figura (7.10) se presentan los resultados al vencimiento de las estrategias de inversión, en este ejemplo para la estrategia staddles comprada el inversor compra una opción CALL americana y una opción PUT americana cuyo vencimiento es dentro de 1 año con precio pactado de 95,45 por 4,57 y 2,68 respectivamente. Para la estrategia strangles comprada se debe comprar una opción CALL americana cuyo vencimiento es 1 año con precio pactado de 98,16 por una prima de 2,34 y comprar una opción PUT americana cuyo vencimiento es 1 año con precio pactado de 92,82 por una prima de 0,51.

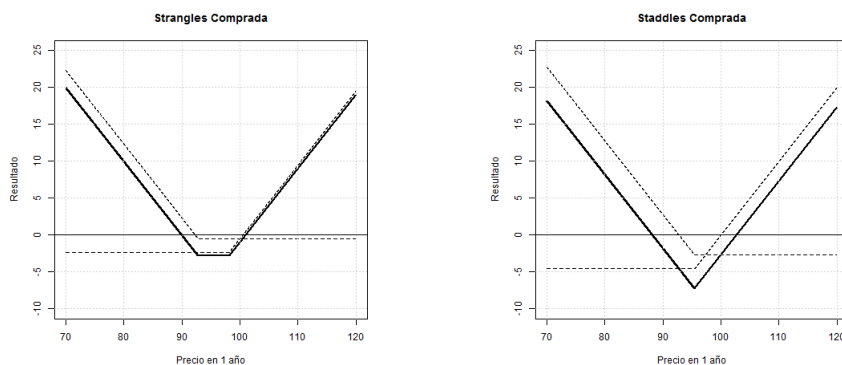


Figura 7.10: Resultado de estrategias para el bono en pesos.

Bono BL190323F nominado en Dólares

Los precios de las distintas opciones en el caso del bono BL190323F nominado en dólares se presentan a continuación:

Opciones Europeas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2%	132,21	0,00	10,12	128,56	0,00	10,18	125,01	0,00	10,20
-1%	127,39	0,00	5,30	124,05	0,00	5,67	121,12	0,00	6,31
0%	122,76	0,32	0,99	119,71	0,27	1,61	117,35	0,14	2,69
1%	118,31	3,82	0,04	115,52	3,04	0,20	113,71	1,83	0,74
2%	114,03	8,05	0,00	111,50	6,90	0,03	110,18	4,80	0,20

Opciones Americanas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2%	132,21	0,00	10,16	128,56	0,00	10,19	125,01	0,02	10,21
-1%	127,39	0,00	5,34	124,05	0,12	5,68	121,12	1,50	6,32
0%	122,76	0,32	1,00	119,71	2,65	1,61	117,35	4,84	2,70
1%	118,31	3,82	0,04	115,52	6,62	0,20	113,71	8,42	0,75
2%	114,03	8,05	0,01	111,50	10,62	0,03	110,18	11,93	0,20

Un inversor precavido que cuenta con el bono dentro de su portafolio de inversiones podría estar interesado en invertir en instrumentos de cobertura. La estrategia más sencilla para un inversor que considere que dentro de tres meses el precio del bono pueda bajar es comprar una opción PUT Europea. Por ejemplo, podría comprar una opción PUT Europea con precio pactado de 127,39 por 5,30. Esto quiere decir que si dentro de 3 meses el precio del bono es inferior a 127,39 el inversor ejercerá la opción y obtendrá una ganancia igual a la diferencia entre el precio pactado y el precio de mercado del bono. En cambio si el precio de mercado es superior al precio pactado el inversor no ejercerá la opción por lo tanto solamente perderá la prima de la opción.

El inversor también puede optar por una estrategia más compleja, como por ejemplo un PUT Back Spread, la cual consiste en comprar dos opciones PUT Europeas y vender una opción PUT con un precio pactado más alto en comparación de la opción anterior. Por ejemplo, se podrían comprar dos opciones PUT Europeas con precio pactado de 127,39 cada una por 5,30

y vender una opción PUT con precio pactado de 132,21 y recibir 10,12. La siguiente figura muestra los posibles resultados de aplicar ambas estrategias. De la gráfica siguiente (7.11), es claro que la estrategia PUT Back Spread es más beneficiosa para el inversor pero es más difícil de implementar.

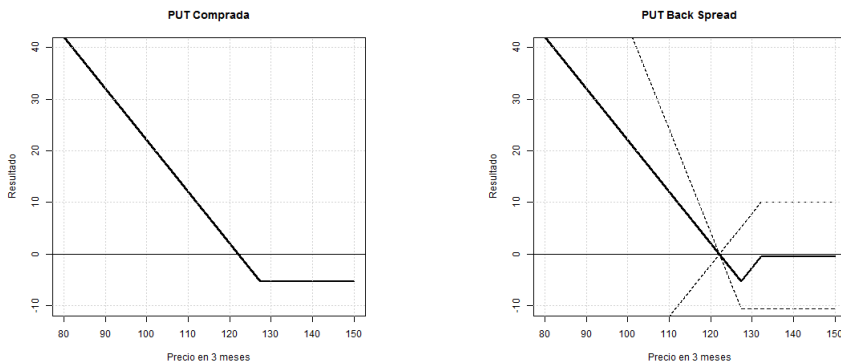


Figura 7.11: Resultado de estrategias para el bono en dólares.

Bono N.T UI-S16 nominado en Unidades Indexadas

Un inversor podría estar interesado en fijar el precio de compra del bono N.T UI-S16 para una fecha futura por el precio de una prima. Las siguientes tablas muestran los precios de las opciones:

Opciones Europeas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2%	105,77	0,00	7,43	104,69	0,00	6,72	104,17	0,01	5,42
-1%	101,82	0,02	3,54	100,97	0,09	3,19	100,92	0,30	2,61
0%	98,03	0,92	0,70	97,39	1,25	0,84	97,78	1,59	0,91
1%	94,38	3,86	0,04	93,94	3,89	0,12	94,73	3,83	0,25
2%	90,88	7,28	0,00	90,61	7,03	0,01	91,79	6,45	0,06

Opciones Americanas									
$\pm y_t^c$	3 meses			6 meses			1 año		
	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT	Pactado	CALL	PUT
-2%	105,77	0,00	8,74	104,69	0,00	7,66	104,17	0,02	7,14
-1%	101,82	0,02	4,79	100,97	0,16	3,95	100,92	0,51	3,93
0%	98,03	0,92	1,06	97,39	1,70	1,15	97,78	2,13	1,52
1%	94,38	3,86	0,05	93,94	4,66	0,17	94,73	4,58	0,41
2%	90,88	7,28	0,00	90,61	7,88	0,02	91,79	7,29	0,09

Una estrategia sencilla para un inversor que esté dispuesto a tener la opción de comprar los bonos dentro de 6 meses fijando el precio hoy es comprar una opción CALL Europea. Con esta opción el inversor se puede asegurar un precio máximo y conocido para comprar el bono dentro de 6 meses por el costo de una prima. Por ejemplo, podría comprar dicha opción para el precio pactado de 93,94 por 3,89.

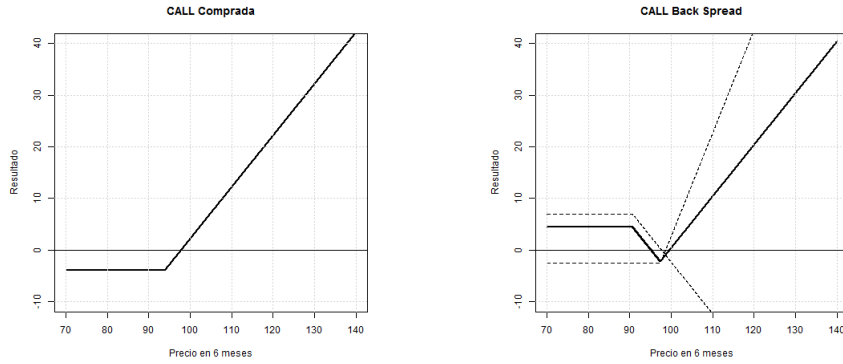


Figura 7.12: Resultado de estrategias para el bono en unidades indexadas.

El inversor podría optar por una estrategia compleja, por ejemplo un CALL Back Spead, la cual consiste en comprar dos opciones Europeas CALL con precio pactado de 97,39 por 1,25 cada una y vender una opciones Europea CALL con precio pactado de 90,61 por 7,03. Los resultados de ambas estrategias se presentan en la figura (7.12) anterior.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo era desarrollar una metodología para el mercado uruguayo que permita valorar instrumentos derivados sobre la renta fija. En particular propusimos una metodología para la valuación de opciones financieras sobre bonos soberanos que sirvan como cobertura para las fluctuaciones del mercado uruguayo. Sin embargo, esta metodología se aplica de igual manera para otro tipo de activos derivados como ser Forward, Futuros, Caplets, Swaps y Swaptions.

Comenzamos introduciendo algunas definiciones básicas sobre arbitraje, activos financieros y los elementos que lo componen, donde hicimos especial hincapié en la relación entre la tasa instantánea y los precios de los Bonos. De esta relación concluimos que, si la dinámica de la tasa instantánea se comporta como una ecuación diferencial estocástica, entonces con cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} se puede construir una familia de precios de bonos libres de arbitraje.

El modelo que utilizamos para determinar la tasa instantánea fue el Black-Derman-Toy (BDT), dicho modelo es de un factor, es decir, cuenta con una sola fuente de incertidumbre para determinar los precios de todos los activos y es un modelo de no arbitraje, es decir, se ajusta el precio de mercado de los activos subyacentes con el precio que proporciona el modelo. El modelo asume que la tasa instantánea se distribuye lognormal, es por esta razón que no existen soluciones analíticas y se requieren procedimientos numéricos.

El enfoque utilizado para valorizar los derivados financieros consistió en discretizar el modelo continuo y trabajar con árboles binomiales sobre la tasa instantánea, con periodicidad diaria, que son construidos hasta el vencimiento del activo subyacente. Luego indicamos como calibrar el modelo BDT de forma que ajuste los precios a la curva de rendimiento y su respectiva curva de volatilidad, las cuales son conocidas.

Posteriormente se presentaron las principales características de la deuda uruguaya, donde se resaltó que no toda la deuda se encuentra bajo la misma jurisdicción y se mostró la gran diversidad de monedas en la que está nominada la misma. Luego se indicó la información disponible en las bolsas de valores, las cuales se utilizaron para calibrar el modelo. En base a la información disponible se seleccionaron tres bonos de referencia cada uno nominado en distintas monedas (pesos, unidades indexadas y dólares), dado que nuestro modelo no contempla la posibilidad de distintas monedas se calibraron tres modelos para determinar la tasa instantánea, uno para cada moneda.

Por último, se presentaron los resultados obtenidos para cada uno de los bonos de referencia, dichos resultados incluyen los precios de las primas para opciones financieras CALL y PUT para opciones tipo europeas y americanas utilizando distintos precios pactados. Para dichos resultados se realizó un análisis en el cual se discutían distintas estrategias de inversión.

La principal ventaja de esta metodología es que podríamos aplicar la misma para calcular los precios de una gran cantidad de activos derivados como ser Opciones, Forward, Futuros, Caplets, Swaps y Swaptions, solamente basta con calibrar el árbol binomial para la tasa instantánea hasta el plazo máximo del activo que se quiere calcular. Es decir, si calibramos el árbol binomial para la tasa instantánea hasta un plazo de diez años podremos calcular cualquier activo derivado cuyo activo subyacente tenga un vencimiento menor a diez años. Adicionalmente,

como la metodología utilizada discretiza el modelo continuo en un modelo discreto con periodo diario, con el mismo árbol binomial podemos calcular los precios de las opciones sobre cualquier bono soberano. Esta ventaja es particularmente importante en la práctica dado que simplifica los cálculos, es decir, solamente deberíamos calibrar el árbol binomial para la tasa instantánea para el bono soberano con mayor plazo hasta el vencimiento, luego con dicho árbol calcularíamos todos los precios de las opciones financieras para cualquier bono soberano cuya moneda de emisión sea la misma.

Esperamos que la metodología planteada en este trabajo pueda servir de referencia para el desarrollo futuro de un eventual mercado de opciones sobre la renta fija en Uruguay.

Eventuales extensiones

Este trabajo proporciona una gran cantidad de eventuales extensiones, la más inmediata como ya se mencionó, sería calcular los precios de distintos derivados financieros como ser Forward, Futuros, Caplets, Swaps y Swaptions.

Un supuesto que utilizamos en el modelo es que el mismo es de un solo factor, una eventual extensión de la metodología sería considerar modelos con más de un factor. Dentro de la literatura existen una importante cantidad de modelos de los cuales destacamos los modelos de Heath-Jarrow-Morton (1987), Longstaff-Schwartz (1992) y Chen (1996).

Otra posible extensión de este trabajo consistiría en valorar opciones financieras sobre bonos corporativos. Esto dependerá de la forma en la que se valúen los bonos corporativos en relación a los bonos soberanos. En particular, si determinamos el spread de un bono corporativo con un bono soberano, es decir, la diferencia entre la tasa de interés al vencimiento del bono corporativo con la tasa de interés al vencimiento de un bono soberano con idéntico flujo de pago, y suponemos que dicho spread se mantiene constante en el tiempo (o tiene una estructura determinística) podría ser sencillo aplicar la metodología expuesta en este trabajo para dicho propósito.

El desafío sería encontrar un modelo para la deuda uruguaya que contemple todas las características de la misma, es decir, que contemple la posibilidad de distintas jurisdicciones y monedas de emisión, siendo el mismo libre de arbitraje. Este problema no lo abordamos en este trabajo, simplemente modelamos la tasa instantánea para cada una de las posibilidades consideradas. Utilizamos las monedas pesos, unidad indexada y dólar para tres bonos con jurisdicción uruguaya.

Bibliografía

- [1] **Bank for International Settlements (BIS, Octubre 2005)**. Zero-coupon yield curves: technical documentation. BIS Paper No 25.
- [2] **Bjork, T. (2009)**. Arbitraje Theory in Continuous Time. Third Edition Oxford Finance.
- [3] **Black, F.; Derman, E.; Toy, W. (1990)**. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. Financial Analysts Journal pp. 24-32.
- [4] **Black, F.; Karasinski, P. (1991)**. Bond and Option pricing when Short rates are Log-normal. Financial Analysts Journal pp. 52-59.
- [5] **Brigo D.; Mercurio F. (2006)**. Interest Rate Models - Theory and Practice. Springer Finance.
- [6] **Buetow, G.; Sochski J (2001)**. Term-Structure Models Using Binomial Trees. The Research Foundation of AIMR.
- [7] **Cox, J.C.; Ingersoll J.E.; Ross S.A. (1985)**. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica 53: pp. 385-407.
- [8] **Dupacova, J.; Hurt, J.; Stepan J (2003)**. Stochastic Moeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers.
- [9] **Ferstl, R; Hayden, J (2010)**. Zero-Coupon Yield Curve Estimation with the Package termstrc. Journal of Statistical Software Volume 35, Issue 1.
- [10] **Filipovic, D. (2005)**. Interest Rate Models. University of Munich.
- [11] **Filipovic, D. (2009)**. Term-Structure Models. Springer Finance.
- [12] **Ho T.S.Y., Lee S.B. (1986)**. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of Finance 41.
- [13] **Hull J.C. (2012)**. Options, Futures, and Other Derivatives. Eighth Edition Prentice Hall.
- [14] **Hull J.; White A. (1990)**. Pricing interest-rate derivative securities. The Review of Financial Studies, Vol 3, No. 4 pp. 573-592.
- [15] **Jamshidian (1991)**. Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models. The Journal of Fixed Income.
- [16] **Luenberger D. (1997)**. Investment Science. Oxford University Press.
- [17] **McCulloch J.H. (1975)**. The Tax-Adjusted Yield Curve. The Journal of Finance 30, pp. 811-830.
- [18] **Musiela, M.; Rutkowski M. (2005)**. Martingale Methods in Financial Modelling. Second Edition, Springer.

- [19] **Nelson, C.R.; Siegel, A.F. (1987).** Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60(4), pp. 473-489.
- [20] **Shreve S. (2008).** *Stochastic Calculus for Finance 2*. Springer Finance.
- [21] **Stander, Y (2005).** *Yield Curve Modeling*. Palgrave Macmillan.
- [22] **Svensson, L. (1994).** Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994, Papers 579 - Institute for International Economic Studies.
- [23] **Svoboda, S. (2004).** *Interest Rate Modelling*. Palgrave Macmillan.
- [24] **Tolentino, M.; Diaz, A. (2006).** El modelo de Black, Derman y Toy en la práctica. Aplicación al mercado Español de deuda pública. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 15 núm. 4 pp. 175-190.
- [25] **Vasicek, O. (1977).** An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5. pp. 177-188.

Código

A continuación se presentan las funciones utilizadas en este trabajo desarrolladas en el lenguaje R.

```

#-----
#----- Funcion Curva -----
#-----
# beta = (beta0,beta1,beta2,tau1,beta3,tau2)
# m = vencimiento en años
# type = "ns" Nelson-Siegel, "sv" Svensson
#-----

cv<-function(beta,m,type="sv"){
a=beta[1]+beta[2]*(1-exp(-m/beta[4]))*(m/beta[4])^(-1)
+beta[3]*((1-exp(-m/beta[4]))*(m/beta[4])^(-1)-exp(-m/beta[4]))
if (type=="sv"){
{a=a+beta[5]*((1-exp(-m/beta[6]))*(m/beta[6])^(-1)-exp(-m/beta[6]))}
a}

#-----
#----- Curva Volatilidad -----
#-----
# x = matriz con yields
# m = vencimientos
# d = matriz con fechas
# p = cantidad de días
# type = "ns" Nelson-Siegel, "sv" Svensson
#-----

V=function(x,m,d,p,type="sv"){
n=nrow(x)
curva=matrix(NA,ncol=p,nrow=n)
for (i in 1:n) {
v <- as.matrix(t(x[i,]))
z <- zeros(yields(m, v, d[i])
adj <- estim_nss(z, "sv")
beta=adj$optparam
curva[i,]=cv(beta, (1:p)/365, type)/100}
a=log(curva[-n,]/curva[-i,])
a=apply(a,2,sd)/sqrt(1/252)*100
a}

#-----
#----- Precio Elemental -----
#-----
# j = 1,2,..
# params = (U, sigma)
# P = matriz acumulada
# type = "C" Comun, "D" baja, "U" sube
#-----

Pe=function(j,params,P,type="C"){
m=dim(P)[1]
if (type=="C"){
if (j==1)
{P[m,j]=1
r=params[1]
P[m,j+1]=P[m-1,j+1]+P[m,j]*exp(-r*dt)/2
}
else {
r=rep(NA,m)
r[(m-j+1):m]=params[1]*exp(-sqrt(dt)*params[2]*seq(-(j-1),(j-1),2))
for (i in (m-j):m) {
if (i==m) {
P[m,j+1]=P[m,j]*exp(-r[m]*dt)/2 }
else {
if (i==(m-j)) {
P[(m-j),j+1]= P[m-j+1,j]*exp(-r[m-j+1]*dt)/2}
else {
P[i,j+1]= P[i+1,j]*exp(-r[i+1]*dt)/2+P[i,j]*exp(-r[i]*dt)/2}}}}
if (type=="U"){
if (j==1)
{P[m,j+1]=1}
else {
r=rep(NA,m)
r[(m-j+1):m]=params[1]*exp(-sqrt(dt)*params[2]*seq(-(j-1),(j-1),2))
for (i in (m-j+1):m) {
if (i==m) {
P[m,j+1]=P[m,j]*exp(-r[m-1]*dt)/2 }
else {
if (i==(m-j+1)) {
P[(m-j+1),j+1]= P[m-j+2,j]*exp(-r[m-j+1]*dt)/2}
else {
P[i,j+1]= P[i+1,j]*exp(-r[i]*dt)/2+P[i,j]*exp(-r[i-1]*dt)/2}}}}
if (type=="D"){
if (j==1)

```

```

{P[m,j+1]=1}
else {
r=rep(NA,m)
r[(m-j+1):m]=params[1]*exp(-sqrt(dt)*params[2]*seq(-(j-1),(j-1),2))
for (i in (m-j+1):m) {
if (i==m) {
P[m,j+1]=P[m,j]*exp(-r[m]*dt)/2 }
else {
if (i==(m-j+1)) {
P[(m-j+1),j+1]= P[m-j+2,j]*exp(-r[m-j+2]*dt)/2}
else {
P[i,j+1]= P[i+1,j]*exp(-r[i+1]*dt)/2+P[i,j]*exp(-r[i]*dt)/2}}}}
P}

```

```

#-----
#----- Calibracion del Arbol -----
#-----
# yields = vector con rendimientos
# volatilidades = vector con volatilidades
#-----

BDT<-function(yields,volatilities){
m=length(yields)
r=matrix(NA,ncol=m,nrow=m)
Pu=matrix(NA,ncol=(m+1),nrow=(m+1))
Pd=matrix(NA,ncol=(m+1),nrow=(m+1))
Params=matrix(NA,ncol=3,nrow=m)
for (i in 1:m) {
if (i == 1) {
r[m,i] = yields[i]
Pd=Pe(i,r[m,i],Pd,type="D")
Pu=Pe(i,r[m,i],Pu,type="U")
Params[i,1]=yields[i]
Params[i,3]=0
params = c(yields[i+1], volatilities[i+1])
}
else {
fn1 <- function(ru) {
rd=ru*exp(-2*volatilities[i]*sqrt(dt))
p=exp(-yields[i]*dt+r[m,1]*dt)
u=exp(-ru*dt*(i - 1))
d=exp(-rd*dt*(i - 1))
{p-(u+d)/2}^2
}
ru = optimize(fn1,c(0,1),tol=1e-08)$minimum
rd = ru*exp(-2*volatilities[i]*sqrt(dt))
fn <- function(params) {
d=-log(sum(Pe(i,params,Pd,type="D")[i+1],na.rm=T))/(dt*(i - 1))
u=-log(sum(Pe(i,params,Pu,type="U")[i+1],na.rm=T))/(dt*(i - 1))
(u - ru)^2+(d - rd)^2 }
params = optim(params,fn)
Pd=Pe(i,params$par ,Pd,type="D")
Pu=Pe(i,params$par ,Pu,type="U")
Params[i,1]=params$par[1]
Params[i,2]=params$par[2]
Params[i,3]=params$convergence
params =params$par
r[(m-i+1):m,i]=params[1]*exp(-sqrt(dt)*params[2]*seq(-(i-1),(i-1),2))
}
}
return(list(r=r,Params=Params,Pd=Pd,Pu=Pu))}

#-----
#----- Precio del Bono -----
#-----
# r = arbol binomial
# coupon_day = vector con posición de cupones
# coupon = valor del cupon
#-----

Pr=function(r,coupon_day,cupon){
m=dim(r)[1]+1
p=matrix(NA,ncol=m,nrow=m)
p[,m]=100+cupon
for (i in (m-1):1) {
for (j in m:(m-i+1)) {
p[j,i]= p[j,i+1]*exp(-r[j-1,i]*dt)/2+p[j-1,i+1]*exp(-r[j-1,i]*dt)/2}
if (sum(i==coupon_day)>0) {p[i,i]=p[i,i]+cupon}
}
}
p}

```



```

#----- Yield to Maturity -----
#-----
# p = precio
# cupon_day = vector con posicion de cupones
# cupon = valor del cupon
#-----
YTM<-function(p,cupon_day,cupon){
fn1 <- function(x) {
if (length(cupon_day)>1){
pp=sum(exp(-x*cupon_day*dt)*c(rep(cupon,length(cupon_day)-1),100+cupon))}
else {
pp=sum(exp(-x*cupon_day*dt)*c(100+cupon))}
abs(p-pp)
}
optimize(fn1,c(0,1),tol=1e-08)$minimum}
#----- Opcion del Bono -----
#-----
# r = arbol binomial
# p = arbol del precio del bono
# S = precio de la opcion
# k = plazo de la opcion
# type = "E" Europea, "A" Americana
# op = "C" Opcion CALL, "P" Opcion PUT
#-----
O=function(r,p,S,k,type="E",op="C"){
m=dim(p)[1]
o=matrix(NA,ncol=k,nrow=m)
if (type=="E"){
for (i in 1:k){
if (op=="C"){
{o[k-i+1,k]=max(p[m-i+1,k]-S,0)}
if (op=="P"){
{o[k-i+1,k]=max(S-p[m-i+1,k],0)}}}
for (i in (k-1):1) {
for (j in k:(k-i+1)) {
o[j,i]= o[j,i+1]*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2+o[j-1,i+1]
*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2 } }
}
if (type=="A"){
for (i in 1:k){
if (op=="C"){
{o[k-i+1,k]=max(p[m-i+1,k]-S,0)}
if (op=="P"){
{o[k-i+1,k]=max(S-p[m-i+1,k],0)}}}
for (i in (k-1):1) {
for (j in k:(k-i+1)) {
if (op=="C"){
{o[j,i]= max(o[j,i+1]*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2+o[j-1,i+1]
*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2,p[m-k+j,i]-S) }
if (op=="P"){
{o[j,i]= max(o[j,i+1]*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2+o[j-1,i+1]
*exp(-r[m-k+j-1,i]*dt)/2,S-p[m-k+j,i] ) }
}}
}
}
}
}

#----- Matriz con Strike -----
#-----
# ytm = yield to maturity
# cupon_day = vector con posicion de cupones
# cupon = valor del cupon
# plazo = vector con los plazos
# y = vector con cambios de yields
#-----
S<-function(ytm,cupon_day,cupon,plazo,y){
m=length(plazo)
n=length(y)
s<-matrix(NA,ncol=m,nrow=n)
for (i in 1:m){
for (j in 1:n){
x=ytm+y[j]
c=cupon_day[cupon_day-(plazo[i]-1)>0]-(plazo[i]-1)
if (length(c)>1)
{precio=sum(exp(-x*c*dt)*c(rep(cupon,length(c)-1),100+cupon))}
else
{precio=sum(exp(-x*c*dt)*c(100+cupon))}
s[j,i]=precio
}}
}

#----- Tabla de Opciones del Bono -----
#-----
# r = arbol binomial
# p = arbol del precio del bono
# s = matriz con Strike para cada plazo
# k = plazos para las opciones
# type = "E" Europea, "A" Americana
#-----
Op<-function(r,p,s,plazo,type="E"){
y=nrow(s)
M<-matrix(NA,ncol=length(plazo)*3,nrow=y)
colnames(M)=c("Strike.3m","CALL.3m","PUT.3m","Strike.6m","CALL.6m",
"PUT.6m","Strike.1a","CALL.1a","PUT.1a")
for (i in 1:y){
for (j in 1:length(plazo)){
M[i,(j-1)*3+1]=s[i,j]
n=0(r,p,M[i,(j-1)*3+1],plazo[j],type,op="C")
M[i,(j-1)*3+2]=n[dim(n)[1],1]
n=0(r,p,M[i,(j-1)*3+1],plazo[j],type,op="P")
M[i,(j-1)*3+3]=n[dim(n)[1],1]
}}
}
}
}
}

```