



Universidad de la República

Facultad de Ingeniería

Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática

Calibración del Modelo HJM (Heath-Jarrow-Morton) para Mercados de Petróleo

Autor: Federico De Olivera

Directores de Tesis: Dr. Ernesto Mordecki, Dr. Raúl Tempone

Montevideo, Uruguay

marzo de 2010

Agradecimientos:

En todo trabajo académico el aporte de colegas, amigos y familiares es de singular relevancia. Seguramente al tratar de listar las personas que ayudaron a hacer posible este trabajo se produzcan omisiones, no obstante ello debo reconocer a aquellos que participaron de forma más cercana pidiendo disculpas si se produce algún olvido.

Comenzando desde mi formación de grado, muchos docentes formaron mi espíritu “investigador” y me abrieron las puertas a fomentar mis razonamientos y no meramente aplicar algoritmos, entre ellos destaco a Enrique Cabaña y Marco Scavino.

A mi colega y amigo, Federico Dalmao, con quién compartimos los estudios de posgrados, incluso estudiando las bases de matemática en finanzas que posteriormente me abrieron la puertas a iniciar el presente trabajo.

A Juan Cirieli y Alejandro Pena, quienes cedieran un importante tiempo para ayudarme a encontrar los datos con los que trabajar.

A Raúl Tempone, por el apoyo y el empuje para seguir adelante.

A Ernesto Mordecki, a quién agradezco infinitamente por creer que se puede, por el apoyo, por el seguimiento, por las horas dedicadas a mi tarea. Sin duda que sin el aporte de Ernesto no sólo el presente trabajo no hubiera sido posible, sino que tampoco hubiera podido avanzar en los estudios de posgrado.

A César Niche y Eduardo Canale, de cuyos cursos disfruté y tuve la posibilidad de diversificar mis conocimientos.

Por último, y no menos importante, a Marcela por el apoyo y la tolerancia a lo largo de todos mis estudios. A Santiago y al pequeño Matías, nacido durante

el desarrollo de la presente tesis, con quienes aprendo día a día que en la vida hay cosas importantes, pero los hijos son los hijos.

A todos ellos y a todos los que ayudaron directa o indirectamente a que este trabajo sea posible, mi sincero agradecimiento.

Índice

1. Introducción	6
I El Mercado Financiero y el modelo HJM	11
2. Modelización para la tasa de interés	12
2.1. Algunos resultados con la tasa a la vista	14
2.2. Modelo HJM	19
II Adaptación a Mercados de Petróleo	23
3. Modelización para mercados de petróleo	24
3.1. Modelización para el precio de petróleo	25
3.2. Construcción de la dinámica según el modelo HJM	30
4. Valuación de contratos	35
4.1. Cap, Floor y Collar	35
4.2. Precio del Cap bajo el mercado de petróleo	36
4.3. Precio del Floor y del Collar bajo el mercado de petróleo	39
5. Calibración del modelo con volatilidades constantes	42
5.1. Modelo de volatilidades constantes	42

5.2. Estimación directa de los parámetros	43
5.2.1. Estimación de σ	43
5.2.2. Estimación de v	45
5.2.3. Estimación de ρ	49
5.3. Estimación Máximo-verosímil de los parámetros	51
5.4. Estimación bayesiana de los parámetros	53
III La puesta en práctica	57
6. Los datos	58
6.1. La estimación	59
6.1.1. Estimación directa	59
6.1.2. Estimación máximo-verosímil	60
6.1.3. Estimación bayesiana	63
6.2. Un ejemplo concreto de estimación del Collar	66
7. Conclusiones	71
A. Un método rápido para obtener k_f	76
B. Una aproximación a la máxima verosimilitud	77
C. Programación	79

1. Introducción

Existen dos posibles enfoques para modelar la evolución del tipo de interés. Inicialmente se han desarrollado modelos basados en la “tasa a corto plazo” donde encontramos por ejemplo el modelo de Vasicek [28], en este modelo se asume que la tasa de interés instantánea es un proceso $r(t)$ que satisface

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t$$

donde a, b y σ son no negativos.

El modelo de Vasicek tiene algunas peculiaridades que lo hacen muy atractivo. La ecuación es lineal y puede ser resuelta de manera explícita, la distribución de la tasa es gaussiana, y por ende se puede obtener de forma sencilla la distribución de los derivados.

Bajo el modelo de Vasicek, la tasa de interés puede tomar valores negativos con probabilidad positiva, una posible dinámica alternativa es la de Cox, Ingersoll y Ross [6], donde se propone una dinámica del tipo:

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t$$

con σ y a no negativos, $b \in \mathbb{R}$.

Estos y muchos otros modelos pueden ser leídos en [3], donde también se encuentran desarrolladas algunas de las ventajas y algunos de los inconvenientes que presentan.

Como alternativa a los modelos basados en la “tasa a corto plazo” se encuentran los modelos basados en la “tasa futura” (*forward rate*). El primer resultado de importancia histórico para la modelación de la “tasa futura” ha sido propuesto

por Ho y Lee (1986) [17], que modelaron la evolución de toda la curva mediante un árbol binomial.

Su intuición básica se tradujo en tiempo continuo por Heath, Jarrow y Morton (1992) [13], los cuales desarrollaron un marco bastante más general para la modelación de la dinámica del tipo de interés.

Siendo $f(t, \tau)$ la tasa de interés al tiempo t que será aplicada al tiempo τ ($t \leq \tau$), la dinámica propuesta por *HJM* es:

$$df(t, \tau) = \alpha(t, \tau)dt + \sigma(t, \tau)dW_t$$

donde el proceso $(\alpha(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ es adaptado y las funciones $(t, \tau) \rightarrow \alpha(t, \tau)$ $(t, \tau) \rightarrow \sigma(t, \tau)$ son continuas.

La clave de este modelo es el reconocimiento de que la deriva de la evolución de ciertas variables pueden expresarse en función de sus volatilidades bajo no arbitraje. En otras palabras, no se necesita una estimación de la deriva.

Los modelos basados en HJM difieren de los modelos llamados a “corto plazo” en el sentido que en los modelos HJM se captura la dinámica completa de la curva de interés, mientras que en los modelos a “corto plazo” sólo se captura la dinámica de un punto sobre la curva.

Sin embargo, los modelos desarrollados en el marco general HJM son frecuentemente no markovianos e incluso pueden tener dimensiones infinitas, pero bajo ciertas condiciones para la volatilidad un modelo HJM se puede expresar en su totalidad por un sistema de estado finito de Markov, por lo que es computacionalmente factible, por ejemplo ver [3].

En el presente trabajo no intentamos modelar la tasa de interés, lo que tratamos de realizar es una adaptación de estas técnicas utilizadas en mercados fi-

nancieros para aplicarlas en el contexto de los mercados de petróleo.

Existe en la literatura algunas referencias que trabajan la adaptación del modelo HJM a energía eléctrica, por ejemplo [4], [15] y [16].

En ellos se procede a hacer un cambio de numerario, de forma que el precio futuro del MWh sea interpretado, bajo este nuevo numerario, como un Bono Cupón Cero, pudiendo aquí aplicar el modelo HJM del mercado financiero.

En este trabajo seguimos esta línea de trabajo, principalmente basados en [16]. Es importante resaltar que no se encuentran mayores desarrollos de la aplicabilidad del modelo HJM a mercados de petróleo.

La introducción del numerario nos lleva a tener que modelar no solo la dinámica del precio futuro del nuevo “producto básico”, sino que también debemos modelar la dinámica del numerario.

Según el “Meta-Theorem” de Björk, ver [1], para tener un mercado completo y libre de arbitraje, la cantidad de activos subyacentes en el modelo, excluido el numerario, debe ser igual a la cantidad de fuentes de aleatoriedad. En esta dirección es que se propone un modelo gaussiano unidimensional para el Precio del Barril de Petróleo descontado. La modelación del numerario se hace mediante un modelo gaussiano bi-dimensional, que mantiene cierta correlación, a estimar, con la dinámica para el Precio del Barril de Petróleo descontado.

Al igual que en [16], enunciamos un modelo axiomático que permitirá el pasaje del mercado financiero al mercado de petróleo. En el Teorema 3 probamos como bajo este sistema axiomático, el cambio de numerario nos permite sin mayor dificultad pasar entre dichos mercados, logrando así poder calibrar nuestro modelo bajo el esquema financiero y obteniendo en consecuencia, la calibración de nuestro modelo para el precio futuro del barril de petróleo.

Una vez definido el modelo, nuestro interés es ver como aplicarlo en algún

derivado, en este caso nos concentramos en el Collar y obtenemos, al igual que en [16], una fórmula explícita de este tipo de contrato, bajo el supuesto de volatilidades deterministas.

A excepción de la fórmula explícita para el precio del Collar, el modelo general hasta aquí planteado es válido para todo tipo de volatilidades, siempre que sean procesos adaptados. Con el fin de lograr calibrar el modelo es que comenzamos haciendo algunos supuestos, la idea es trabajar con modelos tipo Ho-Lee [17], Hull-White [18] y generalizar el trabajo realizado en [16] mediante la aplicación del modelo Mercurio-Moraleta [22]. Un resumen de estos modelos puede leerse en [3].

Los datos históricos de futuros de petróleo son obtenidos de Bloomberg donde se observa una gran problemática en virtud de la crisis sucedida en el mercado petrolero durante el año 2008, esto nos lleva a reconsiderar los períodos de datos a utilizar así como los métodos de estimación.

En principio desarrollamos el método de estimación directa para un modelo de volatilidades constantes expuestos en [15] y [16] para precios en un mercado eléctrico. Nuestro interés se centra en obtener el estimador máximo verosímil en dicho contexto. Luego de analizados estos métodos y vistas las dificultades, desarrollamos el método de estimación bayesiana.

Culminando el trabajo planteamos un ejemplo concreto donde aplicamos el modelo desarrollado. Aquí planteamos un contrato similar al adquirido por la empresa petrolera estatal ANCAP. En este contrato, ANCAP tiene el derecho de comprar el barril de petróleo por debajo de un precio de “techo” k_c durante un período de tiempo futuro $[\tau_1, \tau_2]$, el precio de “techo” k_c es propuesto por ANCAP y permanece incambiado durante la vigencia del contrato. A su vez, con el fin de no tener costo por un tal contrato, ANCAP se obliga a comprar el barril de petróleo por encima de un precio de “piso” k_f , el cual es propuesto por el emisor

del contrato y permanece fijo durante la vigencia del contrato. Evidentemente k_f depende de k_c entre otras variables.

En resumen, siendo π_t el precio del barril de petróleo en el tiempo t , durante el período de tiempo $[\tau_1, \tau_2]$, ANCAP tiene el derecho/obligación de comprar el barril de petróleo a un precio:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_f & \text{si } \pi_t < k_f \\ \pi_t & \text{si } k_f \leq \pi_t \leq k_c \\ k_c & \text{si } \pi_t > k_c \end{array} \right. .$$

El trabajo consiste en obtener el valor justo para el precio de “piso” k_f con la información del mercado antes de la firma del contrato.

Parte I

**El Mercado Financiero y el
modelo HJM**

2. Modelización para la tasa de interés

Comencemos considerando un espacio de probabilidad filtrado

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}\right).$$

Asumiremos que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ es la filtración natural de un movimiento browniano estándar d -dimensional $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definición 1 (Bono cupón cero)

Un BONO CUPÓN CERO con vencimiento T , es un contrato entre dos agentes, el emisor y el comprador, por el cual el poseedor tiene derecho de recibir una unidad monetaria al tiempo T .

El precio al tiempo t , de un bono cupón cero, con vencimiento T es anotado con $p(t, T)$.

Veamos la relación entre este precio y otras variables de interés.

Anotamos con $f(t, \tau, \tau + \delta)$ a la tasa de interés acordada al tiempo t que será aplicada durante el intervalo $[\tau, \tau + \delta]$, donde $t \leq \tau$ y $\delta > 0$.

Supongamos que al tiempo t vendemos un bono cupón cero con vencimiento τ , por éste recibimos $p(t, \tau)$. Con este dinero podemos comprar exactamente $\frac{p(t, \tau)}{p(t, \tau + \delta)}$ bonos cupón cero con vencimiento $\tau + \delta$.

Así, nuestra inversión neta al tiempo t ha sido igual a cero.

Al tiempo τ vencen los bonos con ese horizonte y estamos obligados a pagar una unidad monetaria. Al tiempo $\tau + \delta$ vencen los correspondientes bonos cupón cero a una unidad monetaria por pieza, así que recibimos $\frac{p(t, \tau)}{p(t, \tau + \delta)} \cdot 1\$$

Ahora, el efecto neto de esta operación es que, basado sobre un contrato al tiempo t , una inversión de una unidad monetaria al tiempo τ nos ha dado $\frac{p(t,\tau)}{p(t,\tau+\delta)} \cdot 1\$$ al tiempo $\tau + \delta$.

Sea R la tasa de interés equivalente a la operación, R debe satisfacer que

$$1 \cdot e^{\delta R} = \frac{p(t,\tau)}{p(t,\tau+\delta)}$$

de donde

$$R = \frac{\log(p(t,\tau)) - \log(p(t,\tau+\delta))}{\delta}, \quad (1)$$

lo que sugiere, si $\delta \rightarrow 0$, que R se obtiene en la derivada del logaritmo de $p(t,\tau)$ respecto de τ .

A partir de esta construcción definimos formalmente los distintos tipos de tasas de interés a considerar en este trabajo:

Definición 2

- LA TASA FUTURA (o tasa futura instantánea) es definida como la tasa acordada al tiempo t para ser aplicada al tiempo τ y resulta de tomar límite en (1) cuando $\delta \rightarrow 0$.

$$f(t,\tau) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(p(t,\tau)) - \log(p(t,\tau+\delta))}{\delta} = -\frac{\partial \log(p(t,\tau))}{\partial \tau} \quad (2)$$

- LA TASA A LA VISTA es la tasa a la cual se efectúan las operaciones en el momento actual. Resulta de considerar la tasa futura en el mismo instante:

$$r(t) := f(t,t) \quad (3)$$

Observación: De (2) tenemos una primer expresión para el precio del bono cupón cero:

$$p(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau f(t, u) du} \quad (4)$$

Aquí se observa que desde el punto de vista matemático es equivalente modelar $f(t, \tau)$ o modelar $p(t, \tau)$.

2.1. Algunos resultados con la tasa a la vista

Para cada instante $\tau \leq T$, definimos un proceso adaptado $\left(p(t, \tau)\right)_{0 \leq t \leq \tau}$ que satisface $p(\tau, \tau) = 1$ y que representa el precio de los bonos cupón cero con vencimiento τ como función del tiempo.

Consecuente con la modelización general que encontramos en la literatura, asumimos la condición de libre arbitraje dada por la existencia de una medida de riesgo neutral (por ejemplo ver [1]):

Hipótesis H: Admitamos que existe una probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} , bajo la cual los precios descontados forman una \mathbb{Q} -martingala, es decir, para todo $\tau \in [0, T]$

$$\tilde{p}(t, \tau) = e^{-\int_0^t r(s) ds} \cdot p(t, \tau) \text{ es una martingala.}$$

Ahora, usando la condición de martingala y que $p(\tau, \tau) = 1$ tenemos:

$$\tilde{p}(t, \tau) = E^{\mathbb{Q}}\left(\tilde{p}(\tau, \tau) \mid \mathcal{F}_t\right) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^\tau r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

eliminando el descuento, si r es adaptado, tenemos:

$$\begin{aligned} p(t, \tau) &= e^{\int_0^t r(s) ds} \cdot \tilde{p}(t, \tau) \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left(\underbrace{e^{\int_0^t r(s) ds}}_{\mathcal{F}_t\text{-medible}} e^{-\int_0^\tau r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t\right) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned} \quad (5)$$

La hipótesis realizada sobre la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ nos permite expresar la densidad de probabilidad \mathbb{Q} con respecto a \mathbb{P} . Anotamos por L_T ésta densidad,

es decir $L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Sea X una variable aleatoria no negativa, luego:

$$E^{\mathbb{Q}}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{Q} = \int_{\Omega} X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X L_T d\mathbb{P} = E^{\mathbb{P}}(X \cdot L_T).$$

Ahora, si X es \mathcal{F}_t -medible,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}(X) &= E^{\mathbb{P}}(X \cdot L_T) = E^{\mathbb{P}}\left(E^{\mathbb{P}}(X \cdot L_T | \mathcal{F}_t)\right) \stackrel{X \text{ } \mathcal{F}_t\text{-medible}}{=} E^{\mathbb{P}}\left(X \cdot \underbrace{E^{\mathbb{P}}(L_T | \mathcal{F}_t)}_{=: L_t}\right) \\ &= E^{\mathbb{P}}(X \cdot L_t) \end{aligned}$$

Luego, la variable aleatoria L_t es la densidad de \mathbb{Q} restringida a \mathcal{F}_t con respecto a \mathbb{P} restringida a \mathcal{F}_t , es decir, $L_t = \frac{d(\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t})}$

Proposición 1

Existe un proceso adaptado $(q(t))_{0 \leq t \leq T}$, de cuadrado integrable c.s., tal que para todo $t \in [0, T]$,

$$L_t = \exp\left(\int_0^t q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|q(s)\|^2 ds\right).$$

Prueba: L_t es una martingala respecto a \mathcal{F}_t (filtración natural del browniano), con la probabilidad \mathbb{P} .

Por teorema de representación de martingalas, ver [10] o [20], existe un proceso adaptado $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ de cuadrado integrable c.s. tal que

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{c.s.} \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

Siendo L_T la densidad de probabilidad $L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, entonces

$$E^{\mathbb{P}}(L_T) = \int_{\Omega} \underbrace{L_T}_{d\mathbb{Q}} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} d\mathbb{Q} = 1.$$

Luego, por ser L_t martingala, tenemos que $E^{\mathbb{P}}(L_0) = E^{\mathbb{P}}(L_T) = 1$.

Como L_0 es \mathcal{F}_0 -medible ^{a)} deducimos que L_0 es constante *c.s.* y de lo anterior $L_0 = 1$ *c.s.*

Por ser $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ tenemos que $L_T > 0$ \mathbb{P} -*c.s.*, en efecto, sea A el suceso $\{L_T = 0\}$ y supongamos que $P(A) > 0$, entonces

$$0 = \int_A \underbrace{L_T}_{d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \int_A d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(A).$$

Consecuente con esto \mathbb{P} no es equivalente con \mathbb{Q} (absurdo).

En general $\mathbb{P}(L_t > 0) = 1$ para todo $t \in [0, T]$.

Supongamos nuevamente que no es cierto, entonces existe $A \in \mathcal{F}_t$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ y $L_t(\omega) = 0 \forall \omega \in A$. Luego,

$$0 < \int_A L_T d\mathbb{P} \stackrel{A \in \mathcal{F}_t}{=} \int_A \underbrace{L_t}_{=0} d\mathbb{P} = 0 \quad (\text{absurdo}).$$

En resumen $L_t > 0$ *c.s.* para todo $t \in [0, T]$.

Ahora, usando la fórmula de Itô :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) dX_s^2$$

aplicada con $f(L_t) = \log(L_t)$, tenemos:

$$\log(L_t) = \log(\underbrace{L_0}_{=1}) + \int_0^t \frac{1}{L_s} \underbrace{dL_s}_{H_s dW_s} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{L_s^2} \underbrace{dL_s^2}_{H_s^2 (dW_s)^2_{ds}}.$$

^{a)} \mathcal{F}_0 es la filtración natural del browniano, el cual en cero es cero *c.s.*

En resumen:

$$\log(L_t) = \int_0^t \frac{H_s}{L_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{H_s^2}{L_s^2} ds.$$

La tesis se concluye tomando $q(t) = \frac{H_t}{L_t}$ el cual es adaptado por serlo H_t y L_t . ■

Corolario 1.1

El precio, al momento t , de un bono cero-cupón con vencimiento $\tau \geq t$ puede ser expresado como

$$p(t, \tau) = E \left(\exp \left(- \int_t^\tau r(s) ds + \int_t^\tau q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^\tau \|q(s)\|^2 ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (7)$$

Prueba: Recordemos primero que $E^{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$ es una variable aleatoria Y , \mathcal{F}_t -medible, tal que

$$E^{\mathbb{Q}}(X\mathbb{I}_A) = E^{\mathbb{Q}}(Y\mathbb{I}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_t.$$

Sea $A \in \mathcal{F}_t$, por un lado tenemos:

$$E^{\mathbb{Q}}(X\mathbb{I}_A) = E^{\mathbb{P}}(XL_T\mathbb{I}_A) = E^{\mathbb{P}}(E^{\mathbb{P}}(XL_T\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_t)) \stackrel{A \in \mathcal{F}_t}{\cong} E^{\mathbb{P}}(E^{\mathbb{P}}(XL_T|\mathcal{F}_t)\mathbb{I}_A).$$

Por otro lado:

$$E^{\mathbb{Q}}(X\mathbb{I}_A) = E^{\mathbb{Q}}(E^{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)\mathbb{I}_A) = E^{\mathbb{P}}(E^{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)L_t\mathbb{I}_A).$$

En resumen:

$$E^{\mathbb{P}} \left(\underbrace{E^{\mathbb{P}}(XL_T|\mathcal{F}_t)}_{\mathcal{F}_t\text{-medible}} \mathbb{I}_A \right) = E^{\mathbb{P}} \left(\underbrace{E^{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)L_t}_{\mathcal{F}_t\text{-medible}} \mathbb{I}_A \right).$$

Por lo tanto ^{b)}

^{b)} $\int_A f = \int_A g$ para todo A -medible $\Leftrightarrow f = g$ c.s.

$$E^{\mathbb{P}}(X L_T | \mathcal{F}_t) = E^{\mathbb{Q}}(X | \mathcal{F}_t) L_t \quad (8)$$

De (5) y la proposición 1 tenemos la tesis. ■

Proposición 2

Para todo vencimiento τ , existe un proceso adaptado $(\bar{\sigma}(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ tal que, sobre $[0, \tau]$

$$\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = [r(t) - \bar{\sigma}(t, \tau)q(t)] dt + \bar{\sigma}(t, \tau) dW_t \quad (9)$$

Prueba: $(\tilde{p}(t, \tau))$ es martingala bajo \mathbb{Q} , por lo tanto $(\tilde{p}(t, \tau)L_t)$ es martingala bajo \mathbb{P} .

Además $\tilde{p}(t, \tau)L_t > 0$ c.s., al igual que en la demostración anterior, existe un proceso adaptado $(\theta(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ de cuadrado integrable c.s. y tal que

$$\tilde{p}(t, \tau)L_t = \tilde{p}(0, \tau) \exp \left[\int_0^t \theta(s, \tau) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(s, \tau)\|^2 ds \right].$$

Sustituyendo L_t de lo obtenido en la Proposición 1 y despejando, llegamos a:

$$p(t, \tau) = p(0, \tau) \exp \left(\int_0^t r(s) ds + \int_0^t [\theta(s, \tau) - q(s)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\|\theta(s, \tau)\|^2 - \|q(s)\|^2) ds \right)$$

Al igual que antes, aplicando la fórmula de Itô ahora con la función exponencial, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} &= r(t)dt + [\theta(t, \tau) - q(t)] dW_t \\
&\quad - \frac{1}{2} (\|\theta(t, \tau)\|^2 - \|q(t)\|^2) dt + \frac{1}{2} \|\theta(t, \tau) - q(t)\|^2 dt \\
&= [r(t) + \|q(t)\|^2 - \theta(t, \tau)q(t)] dt + [\theta(t, \tau) - q(t)] dW_t
\end{aligned}$$

la tesis se concluye con tomar $\bar{\sigma}(t, \tau) = \theta(t, \tau) - q(t)$. ■

Corolario 2.1

Para todo vencimiento τ , existe un proceso adaptado $(\bar{\sigma}(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ y una medida \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} tal que, sobre $[0, \tau]$

$$\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = r(t)dt + \bar{\sigma}(t, \tau)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (10)$$

donde $W_t^{\mathbb{Q}} := W_t - \int_0^t q(s) ds$ es un browniano bajo \mathbb{Q} .

Prueba: El resultado es una consecuencia inmediata de la proposición 2. Basta restringirse a ésta y simplemente recordar que por el Teorema de Girsanov $W_t^{\mathbb{Q}} := W_t - \int_0^t q(s) ds$ es un browniano bajo \mathbb{Q} , siendo W_t un browniano bajo \mathbb{P} . ■

2.2. Modelo HJM

En la subsección anterior obtuvimos algunos resultados que nos permiten expresar el precio del bono cupón cero en términos de la tasa de interés a la vista.

En la presente subsección nos dedicaremos a trabajar con la tasa futura.

Para cada τ , consideremos que el proceso $(f(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ es adaptado, y que la función $(t, \tau) \rightarrow f(t, \tau)$, definida para $t \leq \tau$, es continua.

El siguiente paso de la modelización consiste en asumir que, para cada vencimiento τ y siendo $\tau \in [0, T]$, el proceso $(f(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ satisface una ecuación de la forma:

$$f(t, \tau) = f(0, \tau) + \int_0^t \alpha(s, \tau) ds + \int_0^t \sigma(s, \tau) dW_s \quad (11)$$

donde el proceso $(\alpha(t, \tau))_{0 \leq t \leq \tau}$ es adaptado y las funciones $(t, \tau) \rightarrow \alpha(t, \tau)$ $(t, \tau) \rightarrow \sigma(t, \tau)$ son continuas.

Ahora queremos comprobar que este modelo es compatible con la hipótesis de ausencia de arbitraje **(H)** donde considerábamos la existencia de la probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} , bajo la cual el precio del bono cupón cero, descontado, forman una martingala.

Recordemos que bajo dicha hipótesis obtuvimos en la Proposición (2):

$$\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = \left(r(t) - \bar{\sigma}(t, \tau)q(t) \right) dt + \bar{\sigma}(t, \tau) dW_t.$$

Por tanto, como bajo la tasa de interés futura tenemos de la ecuación (4): $p(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau f(t, u) du}$, busquemos la dinámica ahora, usando (11), para $\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)}$.

Sea $X_t = -\int_t^\tau f(t, s) ds$. Tenemos que $p(t, \tau) = e^{X_t}$ y de la ecuación (11), tenemos:

$$\begin{aligned} X_t &= \int_t^\tau (-f(s, s) + f(s, s) - f(t, s)) ds \\ &= -\int_t^\tau f(s, s) ds + \int_t^\tau \left(\int_t^s \alpha(v, s) dv \right) ds + \int_t^\tau \left(\int_t^s \sigma(v, s) dW_s \right) ds \\ &= -\int_t^\tau f(s, s) ds + \int_t^\tau \left(\int_v^\tau \alpha(v, s) ds \right) dv + \int_t^\tau \left(\int_v^\tau \sigma(v, s) ds \right) dW_v \\ &= X_0 - \int_0^t f(s, s) ds - \int_0^t \left(\int_v^\tau \alpha(v, s) ds \right) dv - \int_0^t \left(\int_v^\tau \sigma(v, s) ds \right) dW_v \end{aligned}$$

donde aplicamos Fubini para integrales estocásticas, ver [21] o [20] . Luego, tenemos:

$$dX_t = \left(f(t, t) - \int_t^\tau \alpha(t, s) ds \right) dt - \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds \right) dW_t$$

y por la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} &= dX_t + \frac{1}{2}d\langle X, X \rangle_t \\ &= \left(f(t, t) - \int_t^\tau \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds \right)^2 \right) dt \\ &\quad - \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds \right) dW_t. \end{aligned}$$

Si la hipótesis **(H)** está presente, debemos tener, de la Proposición 2 y la igualdad $f(t, t) = r(t)$,

$$\bar{\sigma}(t, \tau)q(t) = \int_t^\tau \alpha(t, s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds \right)^2$$

con $\bar{\sigma}(t, \tau) = - \int_t^\tau \sigma(t, s) ds$. Aquí obtenemos

$$\int_t^\tau \alpha(t, s) ds = \frac{1}{2} \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds \right)^2 - q(t) \int_t^\tau \sigma(t, s) ds$$

y diferenciando respecto de τ

$$\alpha(t, \tau) = \sigma(t, \tau) \left(\int_t^\tau \sigma(t, s) ds - q(t) \right).$$

Con este resultado y el corolario 2.1 donde $W_t^\mathbb{Q} = W_t - \int_0^t q(s)ds$ es un browniano bajo \mathbb{Q} , la ecuación (11) se convierte en:

$$f(t, \tau) = f(0, \tau) + \int_0^t \sigma(s, \tau) \left(\int_s^\tau \sigma(s, u) du \right) ds + \int_0^t \sigma(s, \tau) dW_s^\mathbb{Q} \quad (12)$$

La característica más destacada de este modelo es que la ley de la tasa de interés futura bajo \mathbb{Q} solo depende de la función σ , lo que puede observarse directamente de la ecuación (12).

Parte II

Adaptación a Mercados de
Petróleo

3. Modelización para mercados de petróleo

Como hemos visto en la sección 2, para modelar los precios del *bono cupón cero* existen básicamente dos posibles enfoques:

- ✓ **Modelar los precios a la vista.** En este caso se considera una dinámica exógena para los precios a la vista del flujo de “producto básico” (commodity), el cual se describe como un proceso adaptado sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$.

Habiendo especificado la dinámica para los precios a la vista $(p(t))_{t \in [0, T]}$, la evolución de los precios de futuros para el suministro de una unidad de commodity al tiempo $\tau \in [0, T]$ es determinada según la ecuación (5):

$$p(t, \tau) = E^{\mathbb{Q}}[p(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad \text{para todo } t \in [0, \tau]$$

donde \mathbb{Q} es una medida equivalente a \mathbb{P} , bajo la cual los precios descontados son una martingala.

- ✓ **Modelar los precios futuros.** Aquí se trata de describir sistemáticamente los cambios de la curva entera

$$\{p(t, \tau) : 0 \leq t \leq \tau \leq T\}.$$

Una aproximación es basada en la ausencia de arbitraje donde obtenemos una dinámica para los precios dada por las ecuaciones (4) y (12).

Estos dos tipos de modelización admiten ventajas y desventajas. Aunque, los modelos resultan ser matemáticamente equivalentes ya que de uno se obtiene el otro y viceversa.

Aquí no haremos una discusión sobre la mejor forma de modelar ya que el presente trabajo está dirigido a utilizar la modelización para precios futuros. No

obstante, existen muchos textos donde uno puede encontrar tal discusión, por ejemplo [3], [25].

3.1. Modelización para el precio de petróleo

La idea aquí es modelar el precio de un contrato a futuro (*futuros*) de un barril de petróleo. Al desconocer cómo afecta la tasa de interés futura sobre los precios del barril de petróleo, introducimos un numerario, el cual nos permitirá, en cierto sentido, expresar los precios del barril de petróleo en términos de un bono cupón cero. En este contexto podremos utilizar los resultados ya obtenidos anteriormente para el bono cupón cero, (4) y (10). Además, claro está, debemos modelizar el numerario.

Sea $\mathcal{D} := \{(t, \tau) : 0 \leq t \leq \tau \leq T\}$. Para cada $(t, \tau) \in \mathcal{D}$ anotamos con $\pi(t, \tau)$ al precio de un barril de petróleo al tiempo t que será entregado en tiempo τ .

Consideramos que la evolución de los precios futuros $(\pi(t, \tau))_{t \in [0, \tau]}$ es un proceso de valores positivos, adaptado, sobre el espacio filtrado y completo

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}).$$

Asumimos también que al tiempo $t = 0$ se dispone de los precios $\pi^*(0, \tau)$ para todos los plazos de entrega $\tau \in [0, T]$, donde la curva de futuros $(\pi^*(0, \tau))_{\tau \in [0, T]}$ es determinista y continua^{c)}.

Con el fin de introducir un modelo concreto para el precio del petróleo, consideremos que en un modelo matemático de un mercado de petróleo verifica las siguientes condiciones:

^{c)}Anotamos con * cuando se trata de precios observados.

MERCADO DE PETRÓLEO:

- π_1** : $(\pi(t, \tau))_{t \in [0, \tau]}$ es continuo y positivo c.s. para cada $\tau \in [0, T]$.
- π_2** : No hay arbitraje para $\{(\pi(t, \tau)) : \tau \in [0, T]\}$ en el sentido que existe una medida de riesgo neutral \mathbb{Q}^π equivalente a \mathbb{P} tal que para cada $\tau \in [0, T]$, $(\pi(t, \tau))_{t \in [0, \tau]}$ es una \mathbb{Q}^π -martingala.
- π_3** : Los precios futuros comienzan con valores observados: $(\pi^*(0, \tau))_{\tau \in [0, T]}$
- π_4** : Los precios a la vista, $\pi(t, t)$, forman un proceso continuo c.s.

Teniendo el precio de un futuro de petróleo, la idea ahora es expresar dicho precio en unidades de un producto básico, justo en el momento de la entrega, mediante $\frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, t)}$.

En esta nueva “moneda”, los futuros se comportan como bonos cupón cero dados por

$$p(t, \tau) = \frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, t)} \quad \text{para todo } (t, \tau) \in \mathcal{D} \quad (13)$$

La “unidad monetaria” se convierte a un activo riesgoso, nuestro numerario, definido como

$$N(t) = \frac{1}{\pi(t, t)} \quad \text{para todo } t \in [0, T] \quad (14)$$

Luego, llamamos **mercado monetario** a un mercado consistente de bonos cupón cero $\{p(t, \tau) : (t, \tau) \in \mathcal{D}\}$ y un activo de riesgo adicional $(N(t))_{t \in [0, T]}$.

Consideremos que un mercado monetario es determinado por las siguientes condiciones:

MERCADO MONETARIO:

- M₁**: $(N(t))_{t \in [0, T]}$, $(p(t, \tau))_{t \in [0, \tau]}$ son continuos y positivos c.s. para cada $\tau \in [0, T]$
- M₂**: No hay arbitraje para $\{(N(t))_{t \in [0, T]}, (p(t, \tau))_{t \in [0, \tau]} : \tau \in [0, T]\}$ en el sentido que existe un proceso de descuentos, adaptado y positivo $(C(t))_{t \in [0, T]}$ así como una medida de riesgo neutral \mathbb{Q}^M equivalente a \mathbb{P} tal que para cada $\tau \in [0, T]$, $(N(t)/C(t))_{t \in [0, T]}$ y $(p(t, \tau)/C(t))_{t \in [0, \tau]}$ son \mathbb{Q}^M -martingalas.
- M₃**: Los precios comienzan con valores observados: $N^*(0)$, $(p^*(0, \tau))_{\tau \in [0, T]}$
- M₄**: El precio de los bonos es continuo c.s. y termina en uno: $p(t, t) = 1$ para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 3

1. Dado un Mercado de Petróleo con precios $(\pi(t, \tau))_{(t, \tau) \in \mathcal{D}}$, el cambio de moneda dado por (13) y (14) se ajusta a un Mercado Monetario donde el proceso de descuento y la medida de riesgo neutral son dados por:

$$C(t) = p(t, T) \quad \forall t \in [0, T], \quad d\mathbb{Q}^M = \frac{\pi(T, T)}{\pi(0, T)} d\mathbb{Q}^\pi.$$

2. Dado un Mercado Monetario con precios $(p(t, \tau))_{(t, \tau) \in \mathcal{D}}$ y numerario $(N(t))_{t \in [0, T]}$, la transformación

$$\pi(t, \tau) = \frac{p(t, \tau)}{N(t)} \quad (t, \tau) \in \mathcal{D} \quad (15)$$

lo convierte en un Mercado de Petróleo con medida de riesgo neutral dada por

$$d\mathbb{Q}^\pi = \frac{N(T)}{C(T)} \frac{C(0)}{N(0)} d\mathbb{Q}^M.$$

Prueba: 1) Es inmediato notar que las propiedades **M₁**, **M₃** y **M₄** se verifican a partir de las propiedades **π_1** , **π_3** y **π_4** .

Nos falta mostrar que π_2 implica M_2 . Para ello haremos uso del cambio de numerario.

Sea $L(t) := \frac{d\mathbb{Q}^M}{d\mathbb{Q}^\pi} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\pi(t, T)}{\pi(0, T)}$, luego, siendo $0 < s < t$ y usando lo obtenido en (8), Bayes, aplicado a este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, T)} \Big| \mathcal{F}_s \right] &= \frac{E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[L(t) \frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, T)} \Big| \mathcal{F}_s \right]}{L(s)} \\
&= E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{\pi(t, T)}{\pi(0, T)} \frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, T)} \Big| \mathcal{F}_t \right] \cdot \frac{\pi(0, T)}{\pi(s, T)} \\
&= \frac{E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\pi(t, \tau) \Big| \mathcal{F}_s \right]}{\pi(s, T)} \\
&= \frac{\pi(s, \tau)}{\pi(s, T)} \tag{16}
\end{aligned}$$

De forma completamente análoga tenemos que:

$$E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{1}{\pi(t, T)} \Big| \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{\pi(s, T)} \tag{17}$$

Ahora, el precio del bono cupón cero, descontado con $C(t) = p(t, T)$, es \mathbb{Q}^M martingala. En efecto:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{p(t, \tau)}{C(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{\overbrace{\pi(t, \tau)}^{p(t, \tau)} \overbrace{\pi(t, t)}^{C(t)^{-1}}}{\pi(t, t) \pi(t, T)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{\pi(t, \tau)}{\pi(t, T)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\text{de (16)}}{=} \frac{\pi(s, \tau)}{\pi(s, T)} = \frac{\pi(s, \tau) \pi(s, s)}{\pi(s, s) \pi(s, T)} \\
&= \frac{p(s, \tau)}{C(s)}
\end{aligned}$$

De forma análoga, ahora usando (17) tenemos que

$$E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{N(t)}{C(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{N(s)}{C(s)}$$

En resumen, tenemos que tanto $\left(\frac{p(t, \tau)}{C(t)} \right)_{t \in [0, \tau]}$ como $\left(\frac{N(t)}{C(t)} \right)_{t \in [0, T]}$ son martingalas bajo \mathbb{Q}^M y por ende se cumple la tesis.

2) Nuevamente es inmediato notar que las propiedades \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_3 y \mathbf{M}_4 implican las propiedades $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_3$ y $\boldsymbol{\pi}_4$.

Consideremos ahora un proceso de descuento arbitrario $C(t)$, que cumpla la condición que los precios y el numerario descontados son martingalas. Además tomemos $L(t) := \frac{d\mathbb{Q}^\pi}{d\mathbb{Q}^M} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)C(0)}{C(t)N(0)}$, luego

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}^\pi} [\pi(t, \tau) | \mathcal{F}_t] &= \frac{E^{\mathbb{Q}^M} [L(t)\pi(t, \tau) | \mathcal{F}_t]}{L(s)} \\
&= E^{\mathbb{Q}^M} \left[\overbrace{\frac{N(t)C(0)}{C(t)N(0)}}^{L(t)} \overbrace{\frac{p(t, \tau)}{N(t)}}^{\pi(t, \tau)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \frac{C(s)N(0)}{N(s)C(0)} \\
&= E^{\mathbb{Q}^M} \left[\frac{p(t, \tau)}{C(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{p(s, \tau)}{C(s)} \\
&= \pi(s, \tau)
\end{aligned}$$

y por ende \mathbf{M}_2 implica $\boldsymbol{\pi}_2$.

■

Observación: Notemos que nunca se especificó la forma del proceso de descuento para probar que el mercado monetario implica el mercado de petróleo, por ende, la única condición que le exigimos aquí al proceso de descuento es que verifique que los precios y el numerario descontados forman una martingala bajo \mathbb{Q}^M .

3.2. Construcción de la dinámica según el modelo HJM

En esta subsección propondremos un modelo gaussiano para modelar las dinámicas del mercado monetario. Según el Teorema 3, si encontramos un proceso de descuento de modo que los precios del bono cupón cero y el numerario descontados son \mathbb{Q}^M martingalas, entonces obtendremos un mercado de petróleo donde hallaremos la dinámica de los precios futuros de petróleo a partir de las dinámicas propuestas para el bono cupón cero y el numerario.

La información que utilizaremos es sobre precios futuros, esto nos llevará a que la modelización que propondremos se encuentra bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q}^M , es decir, consideramos $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^M$.

Partimos de un espacio de probabilidad filtrado y completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ donde la filtración es la resultante de aumentar, desde el nulo, la filtración generada por el browniano d -dimensional.

Supongamos que los procesos son progresivamente medibles y que la curva de futuros observada, $(\pi^*(0, \tau))_{\tau \in [0, T]}$, es positiva, determinista y absolutamente continua.

Para modelar un mercado monetario consideramos el marco de trabajo HJM y siendo la tasa futura $f(t, \tau)$, la cual, como vimos en la ecuación (12), bajo no arbitraje tiene la dinámica

$$f(t, \tau) = f^*(0, \tau) + \int_0^t \sigma(s, \tau) \bar{\sigma}(s, \tau) ds + \int_0^t \sigma(s, \tau) dW_s$$

donde (W_t) es un browniano d -dimensional, $\sigma(t, \tau)$ es un proceso adaptado de cuadrado integrable c.s., $\bar{\sigma}(t, \tau) = -\int_t^\tau \sigma(t, s) ds$ ^{d)} y $f^*(0, t) = -\frac{d}{dt} \log p^*(0, t) = -\frac{d}{dt} \log \pi^*(0, t)$

Como ya hemos visto anteriormente, bajo la medida de riesgo neutral^{e)} la dinámica del precio del bono cupón cero bajo no arbitraje es dada por:

$$\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = f(t, \tau) dt + \bar{\sigma}(t, \tau) dW_t, \quad p^*(0, \tau) = \frac{\pi^*(0, \tau)}{\pi^*(0, 0)} \quad (18)$$

Consideramos ahora que $(\sigma(t, \tau))_{(t, \tau) \in \mathcal{D}}$ es determinista y de cuadrado integrable.

^{d)}Aquí $\sigma(t, \tau)$ es d -dimensional, $d \geq 1$.

^{e)}Para ser consecuente con la subsección anterior dicha medida es \mathbb{Q}^M .

Para construir un mercado monetario sin arbitraje, consideramos que la dinámica de $(N(t))_{t \in [0, T]}$ es dada por:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = f(t, t)dt + v(t)dW_t \quad N^*(0) = \frac{1}{\pi^*(0, 0)} \quad (19)$$

Donde, como es habitual, $(v(t))_{t \in [0, T]}$ es determinista y de cuadrado integrable.

A continuación mostraremos como, bajo estas dinámicas, podemos definir un proceso de descuento de modo de ajustarnos a un mercado monetario, como ya dijimos, consecuentemente, del Teorema 3, tendremos modelado un mercado de petróleo.

Teorema 4

Sean $(p(t, \tau))_{(t, \tau) \in \mathcal{D}}$ y $(N(t))_{t \in [0, T]}$ con las dinámicas dadas en (18) y (19):

1. $\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = f(t, t)dt + \bar{\sigma}(t, \tau)dW_t$
2. $\frac{dN(t)}{N(t)} = f(t, t)dt + v(t)dW_t$

y precios observados $(\pi^*(0, \tau))$ para todo $\tau \in [0, T]$.

Entonces, definiendo

$$\pi(t, \tau) = \frac{p(t, \tau)}{N(t)} \quad \forall (t, \tau) \in \mathcal{D}$$

obtenemos un mercado de petróleo.

Más aún, la medida de riesgo neutral satisface:

$$d\mathbb{Q}^\pi = \exp \left(\int_0^T v(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|v(s)\|^2 \right) d\mathbb{Q}^M \quad (20)$$

y los precios futuros tienen la dinámica

$$\frac{d\pi(t, \tau)}{\pi(t, \tau)} = \Sigma(t, \tau)dW_t^\pi \quad (21)$$

donde $\Sigma(t, \tau) = \bar{\sigma}(t, \tau) - v(t)$ y W_t^π es un \mathbb{Q}^π browniano.

Prueba: Para probar que $(\pi(t, \tau))$ forma un mercado de petróleo, en virtud del Teorema 3, basta con ver que $(p(t, \tau))_{(t, \tau) \in \mathcal{D}}$ y $(N(t))_{t \in [0, T]}$ forman un mercado monetario.

Consideremos el proceso de descuento

$$C(t) = e^{\int_0^t f(s, s) ds} \quad t \in [0, T]$$

y probemos que se cumplen las propiedades \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 y \mathbf{M}_4 , donde la medida de riesgo neutral es la de partida, es decir, $\mathbb{Q}^M = \mathbb{P}$.

Recordemos que en el marco HJM tenemos que $p(t, \tau) = \exp(-\int_t^\tau f(t, s) ds)$ para todo $(t, \tau) \in \mathcal{D}$. Por ende, de esto y las hipótesis tenemos que se verifican \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_3 y \mathbf{M}_4 .

Probemos ahora que se verifica \mathbf{M}_2 .

Siendo $\mathbb{Q}^M = \mathbb{P}$ y $C(t) = \exp(\int_0^t f(s, s) ds)$, luego, usando integración por partes en el contexto de la fórmula de Itô, tenemos que ^{f)}:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{N_t}{C_t}\right) &= (dN_t) \cdot \frac{1}{C_t} + N_t \cdot d\left(\frac{1}{C_t}\right) \\ &= N_t \left[f_{t,t} dt + v_t dW_t \right] \frac{1}{C_t} + N_t \left[\underbrace{e^{-\int_0^t f_{s,s} ds}}_{1/C_t} (-f_{t,t} dt) \right] \\ &= \frac{N_t}{C_t} v_t dW_t \end{aligned} \quad (22)$$

y por ende $N_t = N(t)$ descontado es una \mathbb{Q}^M -martingala, de forma análoga

$$d\left(\frac{p(t, \tau)}{C(t)}\right) = \frac{p(t, \tau)}{C(t)} \bar{\sigma}(t, \tau) dW_t \quad (23)$$

^{f)}Para simplificar notación anotamos a las variables con sub-índices:

y por ende es también una \mathbb{Q}^M -martingala.

Ahora tratamos de buscar la dinámica para $\pi(t, \tau)$. Con cuentas análogas a las anteriores (Itô) tenemos que

$$\begin{aligned} d\pi(t, \tau) &= d\left(\frac{p(t, \tau)}{N(t)}\right) = \pi(t, \tau)\left(-\Sigma(t, \tau)v(t)dt + \Sigma(t, \tau)dW_t\right) \\ &= \pi(t, \tau)\Sigma(t, \tau)dW_t^\pi \end{aligned}$$

con $W_t^\pi := -\int_0^t v(s)ds + W_t$.

Por último, el Teorema de Girsanov muestra que W_t^π es un browniano bajo

$$d\mathbb{Q}^\pi = \frac{N(T)C(0)}{C(T)N(0)}d\mathbb{Q}^M = \exp\left(\int_0^T v(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|v(s)\|^2 ds\right)d\mathbb{Q}^M.$$

■

4. Valuación de contratos

En esta sección introducimos los contratos *cap*, *floor* y *collar*. La idea es aplicar la modelización del mercado de petróleo realizada en las anteriores secciones para obtener valoraciones de estos productos.

4.1. Cap, Floor y Collar

Definición 3

Cap Los caps son instrumentos de cobertura que ofrecen protección frente a modificaciones perjudiciales de los precios sobre un horizonte temporal fijo $[\tau_1, \tau_2]$.

Se limita a un contrato tipo europeo, donde durante el intervalo de tiempo $[\tau_1, \tau_2]$ el propietario del cap recibe un flujo de caja a una intensidad $((\pi(s, s) - k_c)^+)$ $_{s \in [\tau_1, \tau_2]}$ con un precio de cap $k_c > 0$ especificado en el contrato.

Floor Es análogo al cap pero ahora protege contra bajas del precio en el intervalo de tiempo $[\tau_1, \tau_2]$.

El propietario del floor recibe un flujo de intensidad $((k_f - \pi(s, s))^+)$ $_{s \in [\tau_1, \tau_2]}$ con un precio de floor $k_f > 0$ especificado en el contrato.

Collar Es una combinación de cap con floor. Protege contra los altos precios y renuncia a los bajos precios. Aquí el propietario tiene el derecho/obligación de recibir/pagar un flujo de intensidad $((\pi(s, s) - k_c)^+ - (k_f - \pi(s, s))^+)$ $_{s \in [\tau_1, \tau_2]}$.

Como ya mencionamos, estamos interesados en obtener el precio de, en principio, un *cap* con horizonte temporal $[\tau_1, \tau_2]$. El valor del cap lo deseamos tener al tiempo t con $t < \tau_2$, por ello, para considerar el valor tiempo del dinero,

suponemos que la tasa de interés del activo sin riesgo es constante $r \in (0, +\infty)$, por ejemplo en una cuenta bancaria a interés fijo.

De este modo, una unidad del activo sin riesgo al tiempo $\tau \geq t$ corresponde a $e^{r(\tau-t)}$ unidades al tiempo t .

4.2. Precio del Cap bajo el mercado de petróleo

Proposición 5 (El precio de un cap)

El precio al tiempo t , con información conocida al tiempo t , de un cap con precio de “techo” k_c , válido para el intervalo $[\tau_1, \tau_2]$ sobre el precio del petróleo con la dinámica dada por (21) es:

$$Cap(t, k_c) = \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} \left[\pi(t, \tau) \Phi(d_1(t, \tau)) - k_c \Phi(d_2(t, \tau)) \right] d\tau \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} D(t, \tau) &= \sqrt{\int_t^\tau \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du} \\ d_1(t, \tau) &= \frac{1}{D(t, \tau)} \left(\log \left(\frac{\pi(t, \tau)}{k_c} \right) + \frac{1}{2} D(t, \tau)^2 \right) \\ d_2(t, \tau) &= d_1(t, \tau) - D(t, \tau) \\ \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

Para la demostración de la Proposición 5 se requiere el siguiente lema.

Lema 1 (Fubini con esperanza condicional)

Consideremos el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ y sea $(h(t, \tau))_{t \in [0, T]}$ un proceso adaptado integrable c.s.

Entonces, siendo $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$

$$E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t, \tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} E[h(t, \tau) | \mathcal{F}_t] d\tau$$

Prueba: (del lema) Sea A \mathcal{F}_t -medible, entonces

$$\begin{aligned} E \left(\mathbb{I}_A E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t, \tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) &= E \left(E \left[\mathbb{I}_A \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t, \tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= E \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{I}_A h(t, \tau) d\tau \right) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(\mathbb{I}_A h(t, \tau)) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} E \left[E(\mathbb{I}_A h(t, \tau) | \mathcal{F}_t) \right] d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} E \left[\mathbb{I}_A E(h(t, \tau) | \mathcal{F}_t) \right] d\tau \\ &= E \left[\mathbb{I}_A \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(h(t, \tau) | \mathcal{F}_t) d\tau \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, siendo la igualdad válida para todo A \mathcal{F}_t -medible, obtenemos la tesis ■

Prueba: (de la Proposición 5) De la definición de Cap tenemos que:

$$Cap(t, k_c) = E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} (\pi(\tau, \tau) - k_c)^+ d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Primero apliquemos Fubini, lo que es posible por el lema 1:

$$Cap(t, k_c) = \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[(\pi(\tau, \tau) - k_c)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] d\tau$$

Recordando que la dinámica de los precios $\pi(t, \tau)$ es dada por el Teorema 4:

$$\frac{d\pi(t, \tau)}{\pi(t, \tau)} = \Sigma(t, \tau) dW_t^\pi$$

con $\Sigma(t, \tau) = \bar{\sigma}(t, \tau) - v(t)$ determinista y de cuadrado integrable.

Obtenemos, usando Itô

$$\pi(\tau, \tau) = \pi(t, \tau) \exp \left(\int_t^\tau \Sigma(u, \tau) dW_u^\pi - \frac{1}{2} \int_t^\tau \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du \right)$$

Usando la propiedad de isometría de Itô, tenemos que

$$\int_t^\tau \Sigma(u, \tau) dW_u^\pi = \sqrt{\int_t^\tau \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du} \cdot Z$$

donde $Z \sim N(0, 1)$. Anotemos $D(t, \tau) := \sqrt{\int_t^\tau \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du}$

Nuestro interés se centra ahora en calcular $E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[(\pi(\tau, \tau) - k_c)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$

Traslademos al origen para evitar mayor complejidad, es decir, consideremos $y = \tau - t$, en ese contexto queremos calcular

$$E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[(\pi(y, y) - k_c)^+ \right]$$

Ahora bien, sustituyendo la dinámica de $\pi(y, y)$ tenemos:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[(\pi(y, y) - k_c)^+ \right] &= E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\left(\pi(0, y) \exp \left(D(0, y)Z - \frac{1}{2}D^2(0, y) \right) - k_c \right)^+ \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{x_{0,y}}^{+\infty} \left(\pi(0, y) \exp \left(D(0, y)z - \frac{1}{2}D^2(0, y) \right) - k_c \right) \phi(z) dz \\ &= \pi(0, y) \int_{x_{0,y}}^{+\infty} \underbrace{\exp \left(D(0, y)z - \frac{1}{2}D^2(0, y) - \frac{z^2}{2} \right)}_{-\frac{1}{2}(z-D(0,y))^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &\quad - k_c \Phi(-x_{0,y}) \\ &= \pi(0, y) \Phi(D(0, y) - x_{0,y}) - k_c \Phi(-x_{0,y}) \end{aligned}$$

En (*) usamos que $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ y $x_{0,y}$ es dada por

$$x_{0,y} = \frac{1}{D(0,y)} \left[\log \left(\frac{k_c}{\pi(0,y)} \right) + \frac{1}{2} D^2(0,y) \right]$$

Para obtener la tesis basta con tomar $d_1(t, \tau) := D(t, \tau) - x_{t,\tau}$ y de aquí que $d_2(t, \tau) := -x_{t,\tau} = d_1(t, \tau) - D(t, \tau)$ ■

Observación: Es interesante notar que con la fórmula de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} BS(s, k, \tau, t, r, \sigma) &= s\Phi(d_+) - e^{r(\tau-t)}k\Phi(d_-), \\ d_+ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau-t} \left[\log \left(\frac{s}{k} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (\tau-t) \right]}, \\ d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{\tau-t} \end{aligned}$$

el precio de un cap se puede escribir como sigue

$$Cap(t, k_c) = \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} BS\left(\pi(t, \tau), k_c, \tau, t, 0, D(t, \tau)/\sqrt{\tau-t}\right) d\tau$$

Por ende, dados los parámetros del modelo, podemos usar la fórmula de Black-Scholes insertando la volatilidad

$$\vartheta(\tau) := \frac{D(\tau)}{\sqrt{\tau-t}} \quad \tau \in [t \vee \tau_1, \tau_2]. \quad (25)$$

4.3. Precio del Floor y del Collar bajo el mercado de petróleo

El Cap y el Floor tienen una estrecha relación, basta notar que durante el período $[\tau_1, \tau_2]$ o bien el precio del barril de petróleo se encuentra por encima del valor de strike k o bien igual o por debajo.

Proposición 6

Consideremos que el precio del petróleo es modelado según (21), entonces, con información conocida al tiempo t , se verifica que:

$$Cap(t, k) - Floor(t, k) = \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} (\pi(t, \tau) - k) d\tau \quad (26)$$

Prueba: Por la paridad entre cap y floor tenemos que

$$\begin{aligned} Cap(t, k) - Floor(t, k) &= E^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} (\pi(\tau, \tau) - k) d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{lema 1}}{=} \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} E^{\mathbb{Q}^\pi} (\pi(\tau, \tau) - k \middle| \mathcal{F}_t) d\tau \end{aligned}$$

Ahora nos detenemos en calcular $E^{\mathbb{Q}^\pi} (\pi(\tau, \tau) - k \middle| \mathcal{F}_t)$, al igual que en la prueba de la Proposición 5 nos trasladamos al origen con $y = \tau - t$, usamos la dinámica para $\pi(0, y)$ y llamamos $D(0, y) = \sqrt{\int_0^y \|\Sigma(u, y)\|^2 du}$

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}^\pi} (\pi(0, y) - k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi(0, y) \exp \left(D(0, y)z - \frac{1}{2}D^2(0, y) \right) - k \right) \phi(z) dz \\ &= \pi(0, y) \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\exp \left(D(0, y)z - \frac{1}{2}D^2(0, y) - \frac{z^2}{2} \right)}_{-\frac{1}{2}(z-D(0,y))^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz - k \\ &= \pi(0, y) - k \end{aligned}$$

La tesis se obtiene deshaciendo el cambio de variable. ■

Observación:

- A partir de la Proposición 5 podemos obtener el precio de un Floor al tiempo t , con la información conocida al tiempo t , el cual es dado por:

$$Floor(t, k_f) = Cap(t, k_f) - \int_{t \vee \tau_1}^{\tau_2} e^{-r(\tau-t)} (\pi(t, \tau) - k_f) d\tau \quad (27)$$

y donde $Cap(t, k_f)$ es dado por (24)

- De igual modo, siendo el precio de un Collar al tiempo t dado por

$$Collar(t, k_c, k_f) = Cap(t, k_c) - Floor(t, k_f) \quad (28)$$

Con la información conocida la tiempo t , de las ecuaciones (24) y (27) podemos determinar el valor del collar.

5. Calibración del modelo con volatilidades constantes

Una vez planteadas las dinámicas para el mercado monetario virtual, basta con fijar los procesos $\bar{\sigma}(t, \tau)$ y $v(t)$ para que el modelo del mercado de petróleo quede determinado.

En lo que sigue de la sección nos restringimos a un modelo particular, pero el desarrollo hecho hasta aquí es válido en forma genérica.

5.1. Modelo de volatilidades constantes

Al igual que en [16], proponemos un modelo gaussiano 2-dimensional para modelar el mercado monetario virtual, con volatilidades constantes dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma(t, \tau) &= [\sigma, 0] \text{ donde } \sigma > 0 \text{ es constante} \\ v(t) &= [v\rho, v\sqrt{1-\rho^2}] \text{ donde } v \text{ y } \rho \text{ son constantes, } v > 0 \text{ y } \rho \in [-1, 1]\end{aligned}\tag{29}$$

A partir de esta modelización tenemos determinada $\bar{\sigma}(t, \tau)$:

$$\bar{\sigma}(t, \tau) = - \int_t^\tau \sigma du = [-\sigma \cdot (\tau - t); 0]$$

y queda determinada $\Sigma(t, \tau)$:

$$\Sigma(t, \tau) = \bar{\sigma}(t, \tau) - v(t) = - \left[\sigma \cdot (\tau - t) + v\rho; v\sqrt{1-\rho^2} \right].\tag{30}$$

A continuación presentamos tres métodos de estimación, la estimación directa, la estimación máximo verosímil y la estimación bayesiana.

5.2. Estimación directa de los parámetros

La idea aquí es transformar las variables observables de modo de obtener una muestra de variables también observables cuya verosimilitud depende de un sólo parámetro a la vez, se usa un modelo de estimación jerárquico, estimando primero σ , suponiendo conocido σ se estima v y por último, suponiendo conocidos σ y v se estima ρ .

5.2.1. Estimación de σ

A partir de (29), la dinámica para la tasa futura (12) queda dada por:

$$f(t, \tau) = f(0, \tau) + \sigma^2 t \cdot \left(\tau - \frac{t}{2}\right) + \sigma W_t^1, \quad (t, \tau) \in \mathcal{D} \quad (31)$$

De forma análoga, recordando la dinámica para el precio del bono cupón cero (18) :

$$\frac{dp(t, \tau)}{p(t, \tau)} = f(t, t)dt + \bar{\sigma}(t, \tau)dW_t$$

Luego, aplicando la fórmula de Itô para el logaritmo de $p(t, \tau)$ obtenemos:

$$p(t, \tau) = p(0, \tau) \exp \left(\left(\int_0^t f(u, u) - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_1(u, \tau))^2 \right) du + \int_0^t \bar{\sigma}_1(u, \tau) dW_u^1 \right) \quad (32)$$

recordando que $p(t, t) = 1$ y calculando $p(t, \tau)/p(t, t)$ obtenemos:

$$p(t, \tau) = \frac{p(0, \tau)}{p(0, t)} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} t \tau (\tau - t) - \int_0^t \sigma \cdot (\tau - u) dW_u^1 \right), \quad (t, \tau) \in \mathcal{D} \quad (33)$$

Supongamos ahora que $\tau_1 < \tau_2$, de aquí que:

$$\frac{\pi(t, \tau_1)}{\pi(t, \tau_2)} = \frac{p(t, \tau_1)}{p(t, \tau_2)} = \frac{p(0, \tau_1)}{p(0, \tau_2)} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t(\tau_2(\tau_2 - t)) - \tau_1(\tau_1 - t) + \sigma(\tau_2 - \tau_1)W_t^1\right)$$

Consideramos ahora que disponemos de los precios futuros del barril de petróleo en los tiempos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ con entrega en τ_1 y τ_2 , $\tau_1 < \tau_2$, luego, para $i = 0, 1, \dots, n-1$ tenemos que

$$\ln\left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_{i+1}, \tau_2)} \cdot \frac{\pi(t_i, \tau_2)}{\pi(t_i, \tau_1)}\right) = \frac{\sigma^2}{2}(\tau_2 - \tau_1)\left((\tau_1 + \tau_2)(t_{i+1} - t_i) - t_{i+1}^2 + t_i^2\right) + \sigma(\tau_2 - \tau_1)(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1) \quad (34)$$

de donde concluimos que

$$A_i := \frac{\ln\left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_{i+1}, \tau_2)} \cdot \frac{\pi(t_i, \tau_2)}{\pi(t_i, \tau_1)}\right)}{(\tau_2 - \tau_1)\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sim N(\sigma^2 b_i; \sigma^2) \quad (35)$$

$$b_i = \frac{(\tau_1 + \tau_2)(t_{i+1} - t_i) - t_{i+1}^2 + t_i^2}{2\sqrt{t_{i+1} - t_i}}$$

donde además, por ser los incrementos del browniano disjuntos, tenemos que A_0, A_1, \dots, A_{n-1} son independientes.

Por último, maximizamos el logaritmo de la función de verosimilitud, siendo a_0, \dots, a_{n-1} las realizaciones de A_0, \dots, A_{n-1} , tenemos que $L(\sigma) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que:

$$\ln(L(\sigma)) = -\frac{n}{2} \ln(\pi) - n \ln(\sigma) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i - \sigma^2 b_i)^2}{2\sigma^2}$$

de donde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4(\sum_{i=0}^{n-1} b_i^2)(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2)}}{2 \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2} \quad (36)$$

Procedemos ahora a estimar v .

5.2.2. Estimación de v

En el contexto del Teorema 4, recordemos que el numerario descontado es una martingala bajo la medida original.

Sea $\tilde{N}(t) := \frac{N(t)}{C(t)}$ entonces, de la igualdad (22):

$$\frac{d\tilde{N}(t)}{\tilde{N}(t)} = v(t)dW_t$$

de donde, siendo $v(t) = [v\rho; v\sqrt{1-\rho^2}]$ y aplicando Itô tenemos que:

$$\tilde{N}(t) = \tilde{N}(0) \exp\left(v \cdot V_t - \frac{v^2}{2}t\right) \quad t \in [0, T] \quad (37)$$

donde $V_t := \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^2$ es también un movimiento browniano.

Dados $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \tau_1$, consideramos $\tilde{p}(t, \tau_1) := \frac{p(t, \tau_1)}{C(t)}$, luego:
 $\pi(t, \tau) = \frac{p(t, \tau)}{N(t)} = \frac{\tilde{p}(t, \tau)}{\tilde{N}(t)}$, de donde:

$$\ln\left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_i, \tau_1)}\right) = \ln\left(\frac{\tilde{p}(t_{i+1}, \tau_1)}{\tilde{p}(t_i, \tau_1)}\right) - \ln\left(\frac{\tilde{N}(t_{i+1})}{\tilde{N}(t_i)}\right) \quad (38)$$

De la igualdad (23), siendo $\sigma(t, \tau) = [\sigma; 0]$ y aplicando Itô, obtenemos:

$$\ln\left(\frac{\tilde{p}(t_{i+1}, \tau_1)}{\tilde{p}(t_i, \tau_1)}\right) = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) dW_u^1 - \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau_1 - u)^2 du \quad (39)$$

Sea ahora R_i dado por:

$$\begin{aligned}
R_i &:= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) dW_u^1 - E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) dW_u^1 \middle| W_{t_0}^1, W_{t_1}^1, \dots, W_{t_n}^1 \right) \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) dW_u^1 - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) du (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1) \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \cdot (\tau_1 - u) dW_u^1 - \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} \xi_i dW_u^1 \tag{40}
\end{aligned}$$

$$= \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left((\tau_1 - u) - \xi_i \right) dW_u^1, \tag{41}$$

donde $\xi_i = \frac{(\tau_1 - t_i)^2 - (\tau_1 - t_{i+1})^2}{2(t_{i+1} - t_i)} = \tau_1 - \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$.

Aquí concluimos que R_i es gaussiano con $E(R_i) = 0$ y además, usando la propiedad de isometría de Itô:

$$E(R_i^2) = \sigma^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left((\tau_1 - u) - \xi_i \right)^2 du = \frac{\sigma^2}{12} (t_{i+1} - t_i)^3.$$

Siendo los incrementos en (41) disjuntos, tenemos que R_0, \dots, R_{n-1} son independientes y

$$R_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{12} (t_{i+1} - t_i)^3\right) \tag{42}$$

Notemos que R_i es independiente de $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. En efecto, siendo R_i y $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$ gaussianas, basta con ver que están incorrelacionadas, luego:

$$\begin{aligned}
E[R_i \cdot (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1)] &= E\left[\sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left((\tau_1 - u) - \xi_i \right) dW_u^1 \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} 1 dW_u^1\right] \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \left((\tau_1 - u) - \xi_i \right) \cdot 1 du = 0
\end{aligned}$$

Notemos también que siendo W_t^1 independiente de W_t^2 , tenemos que

$$R_i, (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1), (W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2)$$

son independientes para cada $i = 0, \dots, n-1$.

Ahora, de la igualdad (39) y la igualdad (40) tenemos que:

$$\ln \left(\frac{\tilde{p}(t_{i+1}, \tau_1)}{\tilde{p}(t_i, \tau_1)} \right) = -R_i + \sigma \xi_i (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1) - \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau_1 - u)^2 du. \quad (43)$$

Sea ahora $D_i := \sigma(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1)$, de la igualdad (34) tenemos que:

$$D_i = \frac{\ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_{i+1}, \tau_2)} \cdot \frac{\pi(t_i, \tau_2)}{\pi(t_i, \tau_1)} \right)}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{\sigma^2}{2} \left((\tau_1 + \tau_2)(t_{i+1} - t_i) - t_{i+1}^2 + t_i^2 \right). \quad (44)$$

Definimos ahora C_i como sigue

$$C_i := -\frac{\ln(\tilde{N}(t_{i+1})/\tilde{N}(t_i)) + R_i}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \quad (45)$$

Para que tenga sentido lo que sigue de la estimación, C_i debe ser observable.

En efecto, de la igualdad (44) tenemos que $D_i = \sigma(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1)$ es observable. Sustituyendo este resultado en la igualdad (43) y el resultado en (38) obtenemos:

$$C_i = \frac{\ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_i, \tau_1)} \right) + \xi_i D_i - \frac{\sigma^2}{6} \left[(\tau_1 - t_{i+1})^3 - (\tau_1 - t_i)^3 \right]}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \quad (46)$$

y por ende C_i es observable a partir de $\pi(t_i, \tau_1)$ y $\pi(t_i, \tau_2)$ con $i = 0, \dots, n-1$.

Sigamos con la estimación de v . De la definición de C_i (45) y la igualdad (38) obtenemos:

$$C_i = \frac{v^2}{2} \sqrt{t_{i+1} - t_i} - v \frac{V_{t_{i+1}} - V_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} - \frac{R_i}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \quad (47)$$

Ahora, siendo $\{R_i; (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1); (W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) : i = 0, \dots, n-1\}$ independientes, tenemos que C_0, \dots, C_{n-1} son gaussianas independientes, además:

$$C_i \sim N\left(v^2 \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{2}; v^2 + \sigma^2 \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{12}\right). \quad (48)$$

Por último, supongamos σ conocido y que tenemos información dada en incrementos de tiempo equidistantes, es decir, supongamos que $t_{i+1} - t_i = \delta$ para $i = 0, \dots, n-1$.

De aquí que C_0, \dots, C_{n-1} son *iid* con $C_i \sim N\left(\frac{\sqrt{\delta}}{2}v; v^2 + \frac{\sigma^2\delta^2}{12}\right)$.

Luego, para facilitar las cuentas hacemos el cambio de variable $g = v^2 + \frac{\sigma^2\delta^2}{12}$, y la función de verosimilitud es $L : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\ln(L(g)) = -\frac{n}{2} \ln(\pi) - n \ln(g) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(c_i + \sigma^2\delta^{5/2}/24 - g^2\sqrt{\delta}/2)^2}{2g^2}.$$

Donde se alcanza su único máximo en:

$$g^2 = 2 \frac{-n + \sqrt{n^2 + n\delta \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + \sigma^2\delta^{5/2}/24)^2}}{n\delta}$$

Para terminar la estimación de v , siendo $g^2 - \frac{\sigma^2\delta^2}{12} > 0$ tenemos que el estimador de v es dado por:

$$\hat{v}^2 = 2 \frac{-n + \sqrt{n^2 + n\delta \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + \sigma^2\delta^{5/2}/24)^2}}{n\delta} - \frac{\sigma^2\delta^2}{12} \quad (49)$$

donde:

$$c_i = \frac{\ln\left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_i, \tau_1)}\right)}{\sqrt{\delta}} + \frac{(\tau_1 - t_i)^2 - (\tau_1 - t_{i+1})^2}{2\delta^{3/2}} d_i + \frac{\sigma^2 \left[(\tau_1 - t_i)^3 - (\tau_1 - t_{i+1})^3 \right]}{6\sqrt{\delta}}$$

$$d_i = \frac{\ln\left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_{i+1}, \tau_2)} \cdot \frac{\pi(t_i, \tau_2)}{\pi(t_i, \tau_1)}\right)}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{\sigma^2}{2} \left((\tau_1 + \tau_2)\delta - t_{i+1}^2 + t_i^2 \right)$$

5.2.3. Estimación de ρ

Comencemos observando que ρ puede obtenerse como correlación lineal entre W_t^1 y $V_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$, en efecto, la correlación entre $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$ y $V_{t_{i+1}} - V_{t_i}$ es dada por:

$$\frac{E\left[(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1) \cdot (V_{t_{i+1}} - V_{t_i})\right]}{\sqrt{t_{i+1} - t_i} \sqrt{t_{i+1} - t_i}} = \rho$$

Donde se ha usado que $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$ es independiente de $W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2$.

De la definición de D_i tenemos que $D_i = \sigma(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1)$ y de la igualdad (44) tenemos que D_i es observable.

Sea ahora $E_i := v(V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) + R_i$, por tanto, siendo R_i independiente de D_i :

$$\rho = \text{Corr}(D_i; E_i - R_i) = \frac{E[D_i E_i]}{\sqrt{E[D_i^2]} \sqrt{E[(E_i - R_i)^2]}} \quad (50)$$

Necesitamos que E_i sea observable. De la igualdad (47) tenemos que

$$E_i = \frac{v^2}{2}(t_{i+1} - t_i) - \sqrt{t_{i+1} - t_i} C_i \quad (51)$$

y siendo C_i observable tenemos que E_i es observable.

Es inmediato observar que:

$$E_i - R_i = v(V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) \sim N(0; v^2(t_{i+1} - t_i)) \quad (52)$$

$$D_i = v(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1) \sim N(0; \sigma^2(t_{i+1} - t_i)) \quad (53)$$

Ahora, el desvío de $E_i - R_i$ es dado por:

$$\begin{aligned} E[(E_i - R_i)^2] &= E[(E_i)^2] - 2E[E_i R_i] + E[(R_i)^2] \\ &= E[(E_i)^2] - 2E[v(V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) + R_i] \cdot R_i + E[(R_i)^2] \\ &= E[(E_i)^2] - E[(R_i)^2] \end{aligned}$$

y la estimación para ρ , conocidos σ y v , con $t_{i+1} - t_i = \delta$ es dada por:

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_i e_i}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_i} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (e_i^2 - \sigma^2 \delta^3 / 12)}} \quad (54)$$

donde

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{\ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_{i+1}, \tau_2)} \cdot \frac{\pi(t_i, \tau_2)}{\pi(t_i, \tau_1)} \right)}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{\sigma^2}{2} \left((\tau_1 + \tau_2) \delta - t_{i+1}^2 + t_i^2 \right) \\ e_i &= \frac{v^2 \delta}{2} - \ln \left(\frac{\pi(t_{i+1}, \tau_1)}{\pi(t_i, \tau_1)} \right) - \frac{(\tau_1 - t_i)^2 - (\tau_1 - t_{i+1})^2}{2\delta} d_i \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{6} \left[(\tau_1 - t_i)^3 - (\tau_1 - t_{i+1})^3 \right] \end{aligned}$$

Las estimaciones aquí realizadas para σ , v y ρ son las planteadas en [15] y [16].

5.3. Estimación Máximo-verosímil de los parámetros

Aquí procedemos a hacer una pequeña transformación para obtener una muestra de variables aleatorias normales e independientes. La media y la varianza de dichas variables aleatorias es dependiente del tiempo y de los tres parámetros σ , v y ρ , donde se estudia la posibilidad de maximizar dicha verosimilitud.

En el contexto del teorema 4, la dinámica del precio del petróleo es dada por la igualdad (21), usando Itô tenemos que

$$\pi(t, \tau) = \pi(0, \tau) \exp \left[\int_0^t \Sigma(u, \tau) dW_u^\pi - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du \right] \quad (55)$$

Supongamos que disponemos de los precios futuros del barril del petróleo en los tiempos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ con entrega en τ , luego, para $i = 0, 1, \dots, n-1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi(t_{i+1}, \tau)}{\pi(t_i, \tau)} &= \exp \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma(u, \tau) dW_u^\pi - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\Sigma(u, \tau)\|^2 du \right] \\ &= \exp \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma_1(u, \tau) dW_{u,1}^\pi + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma_2(u, \tau) dW_{u,2}^\pi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[(\Sigma_1(u, \tau))^2 + (\Sigma_2(u, \tau))^2 \right] du \right] \end{aligned}$$

Por ser $\Sigma(u, \tau) = [\Sigma_1(u, \tau); \Sigma_2(u, \tau)]$ determinista, usando la propiedad de isometría de Itô tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma_1(u, \tau) dW_{u,1}^\pi &= \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\Sigma_1(u, \tau))^2 du} \cdot Z_{i,1} && \text{donde } Z_{i,1} \sim N(0, 1) \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma_2(u, \tau) dW_{u,2}^\pi &= \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\Sigma_2(u, \tau))^2 du} \cdot Z_{i,2} && \text{donde } Z_{i,2} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

donde $Z_{i,1}$ y $Z_{i,2}$ son independientes para cada $i = 0, \dots, n-1$ y además, siendo los incrementos disjuntos, tenemos que $(Z_{0,1}, Z_{0,2}), (Z_{1,1}, Z_{1,2}), \dots, (Z_{n-1,1}, Z_{n-1,2})$ son independientes. Sea

$$h_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [(\Sigma_1(u, \tau))^2 + (\Sigma_2(u, \tau))^2] du \quad (56)$$

$$\stackrel{\text{modelo}}{=} -\frac{\sigma^2}{3} [(\tau - t_{i+1})^3 - (\tau - t_i)^3] - \sigma v \rho [(\tau - t_{i+1})^2 - (\tau - t_i)^2] + v^2 [t_{i+1} - t_i]$$

tenemos que

$$\frac{\pi(t_{i+1}, \tau)}{\pi(t_i, \tau)} = \exp \left[\sqrt{h_i} \cdot Z_i - \frac{1}{2} h_i \right] \quad \text{donde } Z_0, \dots, Z_{n-1} \text{ son iid normales } (0, 1).$$

y de aquí que, siendo $A_i = \log \left[\frac{\pi(t_{i+1}, \tau)}{\pi(t_i, \tau)} \right]$, tenemos que

A_0, A_1, \dots, A_{n-1} son independientes con distribución:

$$A_i = \log \left[\frac{\pi(t_{i+1}, \tau)}{\pi(t_i, \tau)} \right] \sim N \left(-\frac{1}{2} h_i, h_i \right) \quad (57)$$

A los valores observados de A_i los anotaremos a_i .

La función de máximo-verosimilitud para dicha muestra viene dada por $L : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(\vec{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} \sqrt{h_i(\vec{\theta})}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i + \frac{1}{2} h_i(\vec{\theta}))^2}{h_i(\vec{\theta})} \right] \quad (58)$$

y pasando al logaritmo obtenemos:

$$\log(L(\vec{\theta})) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \log(h_i(\vec{\theta})) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(a_i + \frac{1}{2}h_i(\vec{\theta})\right)^2}{h_i(\vec{\theta})} \quad (59)$$

La maximización no es posible de hacer directamente y por ende hay que trabajarla numéricamente, sin embargo con métodos numéricos también pueden presentarse serias dificultades, como veremos en la siguiente sección.

5.4. Estimación bayesiana de los parámetros

Un tercer método de estimación que proponemos es el de estimar de forma bayesiana los parámetros y como veremos en la siguiente sección, estimar directamente alguno de los contratos de interés por este método.

Recordemos la idea de la estimación bayesiana. Supongamos que tenemos alguna evidencia que nos permitan asignarle a los parámetros una cierta distribución a priori.

En este trabajo consideramos que σ , v y ρ son, en principio, independientes, y siendo $\sigma \in (0, +\infty)$, $v \in (0, +\infty)$ y $\rho \in [-1, 1]$ podemos asignarles distribuciones continuas en dichos intervalos. En la siguiente sección, en presencia de los datos ajustaremos un poco más las distribuciones a priori.

Ahora bien, teniendo las distribuciones a priori de los parámetros y la verosimilitud $L(\vec{\theta})$ dada por (58), del Teorema de Bayes tenemos que la distribución a posteriori es:

$$f_{post}(\vec{\theta}) = \frac{L(\vec{\theta}) \cdot f_{priori}(\vec{\theta})}{\int_{\Theta} L(\vec{\theta}) \cdot f_{priori}(\vec{\theta}) d\vec{\theta}}$$

Evidentemente aquí tenemos varias complejidades, una de ellas es calcular la integral del denominador y otra es obtener una estimación para los parámetros.

Una estimación “razonable” para $\vec{\theta} = (\sigma, v, \rho)$ es su valor esperado respecto a la distribución a posteriori:

$$E_{post}(\vec{\theta}) = \left[E_{post}(\sigma), E_{post}(v), E_{post}(\rho) \right]$$

de donde estudiemos un componente particular:

$$\begin{aligned} E_{post}(\sigma) &= \int_{\Theta} \sigma f_{post}(\vec{\theta}) d\vec{\theta} = \int_{\Theta} \sigma \frac{L(\vec{\theta}) \cdot f_{priori}(\vec{\theta})}{\int_{\Theta} L(\vec{\theta}) \cdot f_{priori}(\vec{\theta}) d\vec{\theta}} d\vec{\theta} \\ &= \frac{\int_{\Theta} \sigma L(\vec{\theta}) dF_{priori}(\vec{\theta})}{\int_{\Theta} L(\vec{\theta}) dF_{priori}(\vec{\theta})} = \frac{E_{priori}(\sigma L(\vec{\theta}))}{E_{priori}(L(\vec{\theta}))} \end{aligned} \quad (60)$$

Aquí obtuvimos una forma de obtener la esperanza de σ a posteriori por medio de la distribución a priori. El problema puede surgir al momento de querer dar una estimación concreta, calcular tales esperanzas en (60) no es para nada sencillo en nuestro contexto y por ende un estimador de $E_{post}(\sigma)$ es el resultado de obtener una muestra de valores a priori y generar una muestra de las funciones involucradas en (60) para estimar dichas esperanzas por su media, en resumen, proponemos:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (61)$$

donde $\sigma_i, v_i, \rho_i; i = 1, \dots, m$ son obtenidos mediante simulación Monte-Carlo a partir de las distribuciones a-priori.

De forma completamente análoga tenemos las estimaciones para v y ρ

$$\hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (62)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^m \rho_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (63)$$

Naturalmente podemos también obtener un estimador para el desvío estándar a partir de su momento de segundo orden:

$$\hat{E}(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (64)$$

$$\hat{E}(v^2) = \frac{\sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (65)$$

$$\hat{E}(\rho^2) = \frac{\sum_{i=1}^m \rho_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (66)$$

La estimación del desvío estándar es dada por:

$$\widehat{std}(\sigma^2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \right]^2} \quad (67)$$

$$\widehat{std}(v^2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m v_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \right]^2} \quad (68)$$

$$\widehat{std}(\rho^2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \rho_i^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m \rho_i \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \right]^2} \quad (69)$$

Parte III

La puesta en práctica

6. Los datos

En esta sección presentamos los datos con los que contamos y realizamos la calibración del modelo, aquí mostramos las dificultades al momento de usar los distintos métodos de estimación de parámetros. Terminamos la sección mostrando un ejemplo concreto de estimación del Collar.

Contamos con datos históricos de futuros de petróleo, sobre un subyacente genérico, extraídos de Bloomberg. Siendo $\pi(t, \tau)$, el precio de un barril de petróleo al momento t a ser entregado en τ . Los datos con que contamos son diarios para t desde 3 de enero de 2006 al 21 de octubre de 2009 y con entregas cada mes con τ desde 21 de noviembre 2009 al 21 de octubre de 2010.

En la figura 1 podemos observar el gráfico correspondiente a la entrega 21 de noviembre de 2009. Se muestra sólo a los efectos ilustrativos, siendo el resto de los gráficos de apariencia muy similar.

En la figura 1 ya se puede apreciar la problemática de la crisis de 2008 lo que nos lleva a trabajar con un subconjunto de datos.

La estimación de parámetros con toda la serie se torna muy errática. Además, al momento de calibrar el modelo, la estimación de parámetros debe ser “relativamente actual” para reflejar la información del mercado, más aún cuando estamos pensando en aplicarlo para un contrato tipo Collar en un período inmediato de seis meses. Por este motivo es que trabajamos con el subconjunto de datos correspondiente al período: 3 de junio de 2009 al 21 de octubre de 2009 (casi 5 meses), con las mismas entregas que antes. Para la entrega al 21 de noviembre de 2009 puede visualizarse en el rojo en la figura 1.

Una vez que tenemos el conjunto de datos determinado procedemos a realizar la estimación de parámetros.

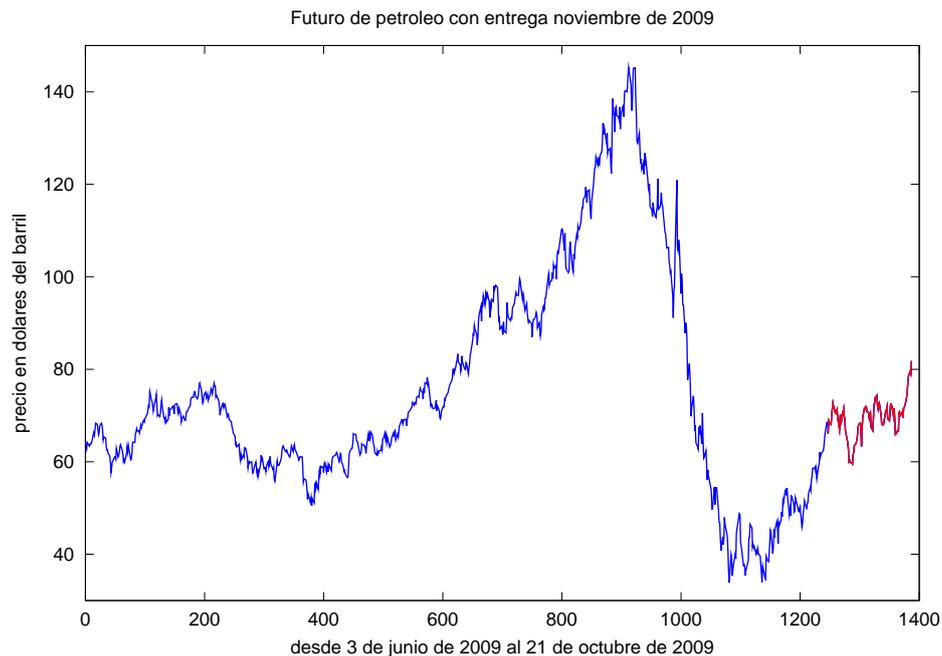


Figura 1: Futuros de petróleo desde 3/01/2006 al 21/10/2009 con entrega 21/11/2009

6.1. La estimación

6.1.1. Estimación directa

Comenzamos aplicando el método directo para estimar los parámetros. Como se mostró en la subsección 5.2, para estimar v y ρ de forma directa debemos tener observaciones equidistantes en el tiempo, esto implica que sólo podemos utilizar datos semanales (por ejemplo los correspondientes a los días miércoles) ya que no se negocia los días sábado y domingo.

La estimación directa de σ puede realizarse utilizando todo los datos en el período acordado.

Procedemos a calcular la estimación de los parámetros con todas las combinaciones posibles de entregas τ_1 y τ_2 . En el cuadro 1 se visualizan los resultados

de la media y desvío estándar de dichas posibles estimaciones.

	σ	v	ρ
datos	mean — std	mean — std	mean — std
semanales	0.026 — $3.95 \cdot 10^{-5}$	0.456 — $4.26 \cdot 10^{-4}$	-0.75 — $6,9 \cdot 10^{-3}$
diarios	0.033 — $6.06 \cdot 10^{-5}$		

Cuadro 1: Estimación directa de los parámetros del modelo.

Podemos observar la reducida desviación de las estimaciones, lo que implica que no importa la entrega que se use ya que la variación de los parámetros es mínima.

Estas estimaciones son tomadas como punto de partida, pero no como definitivas, entre otras cosas porque para la estimación de v y ρ se usaron datos correspondientes a los días miércoles, que en la serie considerada son escasamente 21 datos. Además la estimación de v y ρ es realizada de forma jerárquica^{g)}.

Procedemos ahora a realizar la estimación según el método de máxima verosimilitud.

6.1.2. Estimación máximo-verosímil

La función de verosimilitud dada en (58) no es posible de maximizar de forma explícita, por lo que intentamos hacerlo mediante la aplicación de métodos numéricos. Para el valor de $\rho = -0,8$ y con fecha de entrega abril de 2010 $T = 6$, podemos observar una primera representación gráfica en la figura 2. Aparentemente no se observa mayor dificultad en la maximización, aunque hay varias combinaciones para σ , v que nos dan un valor muy cercano al máximo del loga-

^{g)}Para estimar v se considera conocido σ y para estimar ρ se consideran conocidos σ y v , los cuales evidentemente no lo son.

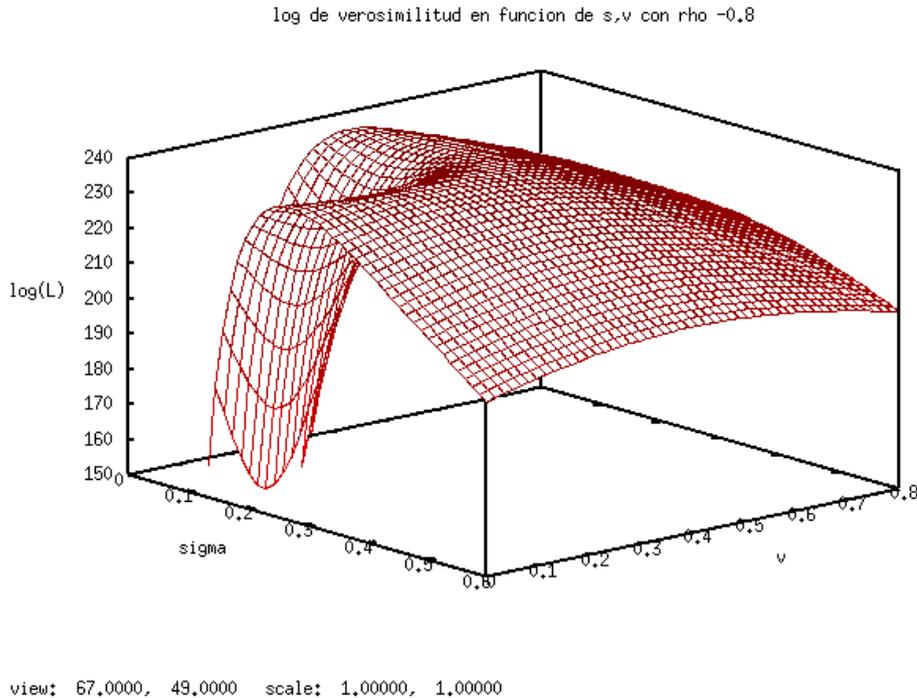


Figura 2: Log de la verosimilitud en función de σ y v , para $\rho = -0.8$. Entrega abril 2010

ritmo de la verosimilitud.

Lamentablemente nos enfrentamos a que los métodos de optimización utilizados por *R* y *Octave* no devuelven solución al momento de encontrar el máximo. Uno de los problemas encontrados es la obtención de múltiples extremos cercanos. A modo de ejemplo mostramos en la figura 3 los gráficos del logaritmo de la verosimilitud en función de σ y v para cuatro valores fijos de ρ ($T = 6$). En este gráfico puede advertirse la complejidad de maximizar la función de verosimilitud (o su logaritmo) mediante el uso de métodos numéricos.

Igualmente, para arrojar resultados, sometemos al logaritmo de la verosimilitud a una grilla de valores donde variamos σ , v en $[0, 1]$ y ρ en $[-1, 0]$ con incrementos para cada parámetro de 0,05. En el cuadro 2 observamos el máximo de $\log(L(\sigma, v, \rho))$ y donde es alcanzado, para cada entrega T .

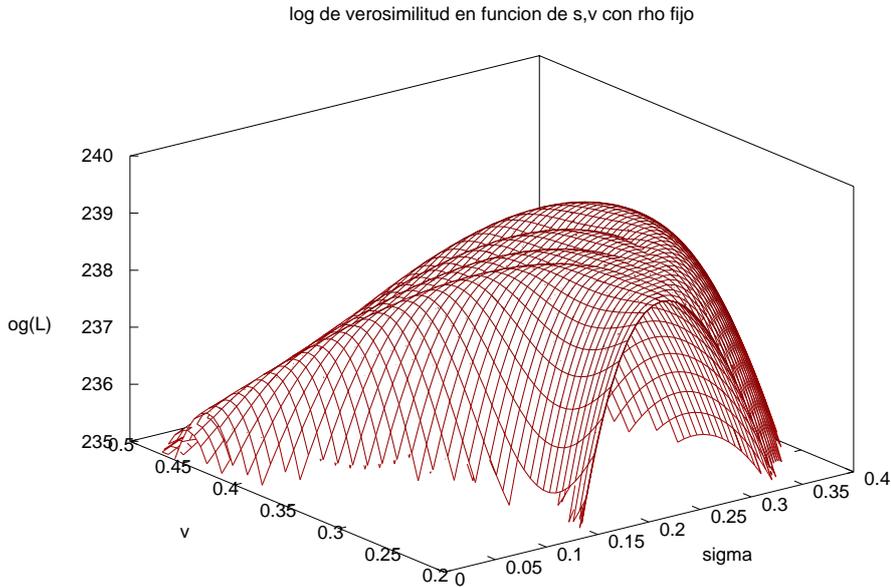


Figura 3: Log de la verosimilitud en función de σ y v , para $\rho = -1, -0,8, -0,6, -0,4$

El cuadro 2 puede inducirnos a que efectivamente estamos en presencia de un máximo (al usar cada entrega), sin embargo, tomamos los puntos donde se obtienen los valores de log verosimilitud que disten menos de una unidad del máximo en la grilla, variación relativa $4 \cdot 10^{-3}$, para todas las entregas disponibles. Con estos valores, al igual que antes, estudiamos su rango, media y desvío para tener una posible tendencia de los parámetros según la estimación máximo verosímil. Los resultados son mostrados en el cuadro 3 y cuadro 4.

Del cuadro 4 podemos extraer algunas conclusiones: la primera es que los valores de máxima verosimilitud se obtienen para valores de ρ que van desde -1 a 0 , cosa que había sido advertida en el gráfico 3. Por otro lado, el parámetro v parece mantenerse bastante estable entre $0,32$ y $0,44$. El parámetro σ es un poco más inestable, sin embargo, si consideramos hacer un contrato por seis meses, entonces es razonable sólo considerar los valores correspondientes a entregas $T =$

Entrega	$\max \log(L(\sigma, v, \rho))$	σ	v	ρ
$T = 1$	223.37	0.000	0.421	-1.000
$T = 2$	224.95	0.052	0.421	-0.473
$T = 3$	228.83	0.052	0.421	-1.000
$T = 4$	232.34	0.105	0.421	-0.842
$T = 5$	235.71	0.105	0.421	-1.000
$T = 6$	238.90	0.105	0.421	-1.000
$T = 7$	241.19	0.105	0.421	-1.000
$T = 8$	243.82	0.052	0.368	-0.789
$T = 9$	245.91	0.052	0.368	-0.894
$T = 10$	247.81	0.052	0.368	-0.947
$T = 11$	249.40	0.052	0.368	-1.000
$T = 12$	251.19	0.052	0.368	-1.000

Cuadro 2: Estimación por máxima verosimilitud sobre la grilla $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 0]$ con incrementos 0.05 en cada variable.

1, 2, ..., 6; y en este caso σ varía entre 0,11 y 2,29.

Como resumen de la estimación máximo verosímil vemos que no es posible hallar un estimador máximo verosímil, sin embargo surgen intervalos suficientemente acotados donde podemos considerar la variación de los parámetros.

6.1.3. Estimación bayesiana

Por ultimo, utilizamos la estimación bayesiana de los parámetros, más en particular y conforme a la literatura moderna, utilizamos lo que se conoce como estimación bayesiana empírica.

En la estimación bayesiana empírica se utiliza parte de la información para

	$\log(L(\sigma, v, \rho))$	σ	v	ρ
mínimo	222.00	0	0.368	-1
máximo	223.37	0.789	0.526	0
media		0.296	0.444	-0.548
desvío		0.198	0.039	0.302

Cuadro 3: Estimación por máxima verosimilitud para los valores mas grandes obtenidos, entrega $T = 1$.

	$\log(L(\sigma, v, \rho))$	σ	v	ρ
entrega	min — max	mean — std	mean — std	mean — std
$T = 1$	222.00 — 223.37	0.296 — 0.039	0.444 — 0.302	-0.584 — 0.302
$T = 2$	223.90 — 224.95	0.249 — 0.152	0.437 — 0.038	-0.576 — 0.300
$T = 3$	227.80 — 228.83	0.181 — 0.131	0.416 — 0.037	-0.546 — 0.309
$T = 4$	231.30 — 232.30	0.145 — 0.110	0.403 — 0.036	-0.544 — 0.302
$T = 5$	234.70 — 235.71	0.130 — 0.086	0.389 — 0.035	-0.568 — 0.301
$T = 6$	237.90 — 238.90	0.115 — 0.079	0.378 — 0.034	-0.573 — 0.305
$T = 7$	240.02 — 241.19	0.110 — 0.073	0.369 — 0.036	-0.559 — 0.310
$T = 8$	242.81 — 243.82	0.080 — 0.070	0.350 — 0.036	-0.537 — 0.309
$T = 9$	244.90 — 245.91	0.075 — 0.066	0.344 — 0.037	-0.537 — 0.304
$T = 10$	246.81 — 247.81	0.089 — 0.056	0.333 — 0.038	-0.550 — 0.296
$T = 11$	248.42 — 249.40	0.071 — 0.053	0.328 — 0.036	-0.558 — 0.298
$T = 12$	250.10 — 251.19	0.068 — 0.051	0.321 — 0.036	-0.551 — 0.303

Cuadro 4: Estimación por máxima verosimilitud para los valores mas grandes obtenidos, todas las entregas.

dirigir, aunque sea mínimamente, la distribución a priori. En nuestro caso, basados en los resultados de estimación directa y de la estimación máximo verosímil (parcial) proponemos como distribuciones a priori distribuciones no informativas pero acotadas a los intervalos de variación observados, es decir, proponemos:

	distribución a priori propuesta
σ	<i>Uniforme</i> (0; 0,3)
v	<i>Uniforme</i> (0,3; 0,5)
ρ	<i>Uniforme</i> (-1; -0,5)

Donde el intervalo para la distribución a priori de ρ es obtenido básicamente por la estimación directa.

Los resultados de la estimación bayesiana para 10.000 simulaciones son mostradas en el cuadro 5

Como resumen de esta subsección podríamos concluir que si estamos interesados en aplicar este modelo a un período inmediato posterior semestral, requerimos estimaciones puntuales de los parámetros, entonces estimaciones razonables serían obtenidas considerando las entregas correspondientes a $T = 1, \dots, 5$ ya que cubren un semestre futuro desde el momento en que se obtuvo la información. Promediando estos valores, los cuales se encuentran remarcados en el cuadro 5 obtenemos:

σ	v	ρ
0.14	0.42	-0.75

Con esto concluimos mínimamente como, para una estimación de los parámetros, al momento de usar este modelo, deberá ser cuestionado el período de interés para indagar sobre los parámetros que más conviene utilizar. Igualmente, como veremos en la siguiente sección, mediante la estimación bayesiana podemos

	σ	v	ρ
Entrega	mean — std	mean — std	mean — std
$T = 1$	0.14 — 0.0074	0.44 — 0.0008	-0.74 — 0.0202
$T = 2$	0.14 — 0.0074	0.44 — 0.0008	-0.74 — 0.0206
$T = 3$	0.14 — 0.0073	0.43 — 0.0010	-0.74 — 0.0206
$T = 4$	0.14 — 0.0072	0.41 — 0.0011	-0.75 — 0.0203
$T = 5$	0.14 — 0.0070	0.40 — 0.0012	-0.75 — 0.0205
$T = 6$	0.13 — 0.0066	0.39 — 0.0013	-0.76 — 0.0206
$T = 7$	0.12 — 0.0058	0.38 — 0.0012	-0.76 — 0.0209
$T = 8$	0.11 — 0.0049	0.37 — 0.0011	-0.77 — 0.0205
$T = 9$	0.10 — 0.0040	0.36 — 0.0011	-0.76 — 0.0205
$T = 10$	0.09 — 0.0032	0.36 — 0.0010	-0.77 — 0.0203
$T = 11$	0.08 — 0.0027	0.35 — 0.0009	-0.77 — 0.0200
$T = 12$	0.08 — 0.0022	0.35 — 0.0008	-0.77 — 0.0206

Cuadro 5: Estimación de Esperanza y desvío a posteriori de los parámetros para 10.000 simulaciones

no requerir una estimación puntual de los parámetros del modelo obteniendo una estimación para Esperanza y Desvío del contrato de interés, en nuestro caso el Collar.

6.2. Un ejemplo concreto de estimación del Collar

Terminamos la sección con un ejemplo concreto de aplicación del modelo. Supongamos que al tiempo $t = 0$ (11 de enero de 2010), una compañía refinadora de petróleo desea firmar un contrato por el cual se asegure que en los próximos seis meses no pagará el barril de petróleo por encima de 120 dólares. El valor al día de hoy ($t = 0$) del barril es 82,52 dólares.

Por otra parte, la compañía no quiere pagar prima alguna por dicho contrato, como contrapartida, está dispuesta a renunciar a los precios bajos, es decir, si durante los próximos seis meses el precio del barril de petróleo se encuentra por debajo de un valor prefijado k_f , entonces la compañía igualmente se obliga a comprarla a k_f .

El problema ahora es hallar el valor k_f justo, con la información que tenemos del mercado.

El problema se encuentra dentro de lo estudiado en la sección 4, más precisamente, tenemos un Collar con valor de “techo” $k_c = 120$ y valor de “piso” k_f desconocido, él cual queremos hallar para que el valor del Collar sea nulo.

El período a considerar es $\tau \in [0; 0,5]$. Para aplicar el modelo y la fórmula obtenida en (28) necesitamos tener la curva inicial, la cual es reconstruida mediante spline cúbico a partir de los datos de futuros encontrados en <http://www.cmegroup.com/trading/energy/crude-oil/light-sweet-crude.html>.

Por último necesitamos la tasa de interés fija a usar durante el período, la cual la obtenemos de <http://www.federalreserve.gov/Releases/H15/20091207/> y fijamos en $r = 0,06$.

Ahora bien, debemos decidir qué parámetros utilizar en el modelo, o mejor, qué método utilizar. Dada la inestabilidad del método de máxima verosimilitud en nuestro caso optamos por la estimación bayesiana, además, en lugar de recurrir a usar una estimación puntual de los parámetros para luego hacer el cálculo del collar, optamos por hallar un estimador directo de la esperanza y desvío a posteriori del Collar^{h)}:

^{h)}Utilizamos los datos con entrega $T = 6$.

$$E_{post}(Collar(\vec{\theta})) = \frac{E_{priori}(Collar(\vec{\theta})L(\vec{\theta}))}{E_{priori}(L(\vec{\theta}))} \quad (70)$$

por ende la estimación, luego de realizadas m simulaciones a priori de los parámetros, para la Esperanza y momento de segundo orden son:

$$\hat{E}_{post}(Collar(\vec{\theta})) = \frac{\sum_{i=1}^m Collar(\sigma_i, v_i, \rho_i) \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (71)$$

$$\hat{E}_{post}([Collar(\vec{\theta})]^2) = \frac{\sum_{i=1}^m [Collar(\sigma_i, v_i, \rho_i)]^2 \cdot L(\sigma_i, v_i, \rho_i)}{\sum_{i=1}^m L(\sigma_i, v_i, \rho_i)} \quad (72)$$

Ahora bien, nosotros no vamos a tener una estimación fija, pues bajo la estimación bayesiana el Collar es una variable aleatoria, la cual además depende de k_f .

Procedemos a realizar una primera aproximación al valor de k_f que anule el Collar, para ello realizamos una partición de los posibles valores de k_f en un entorno “razonable” y realizamos, para cada k_f , una estimación de la media del Collar mediante 100 simulaciones a priori de los parámetrosⁱ⁾.

El resultado de dicha primer aproximación puede verse en la figura 4. Donde obtenemos que el Collar encuentra su cambio de signo en el intervalo [61.38; 62.41] como se visualiza en el cuadro 6.

No debemos olvidarnos que los resultados mostrados en el cuadro 6 son sólo válidos como aproximación, ya que son estimaciones a posteriori a partir de 100

ⁱ⁾Para evitar la variabilidad por estimación, usamos los mismos parámetros simulados para los distintos valores de k_f

k_f	61.38	62.41
\widehat{Collar}	0.00255	-0.00205

Cuadro 6: Intervalo que contiene la raíz de la estimación del Collar

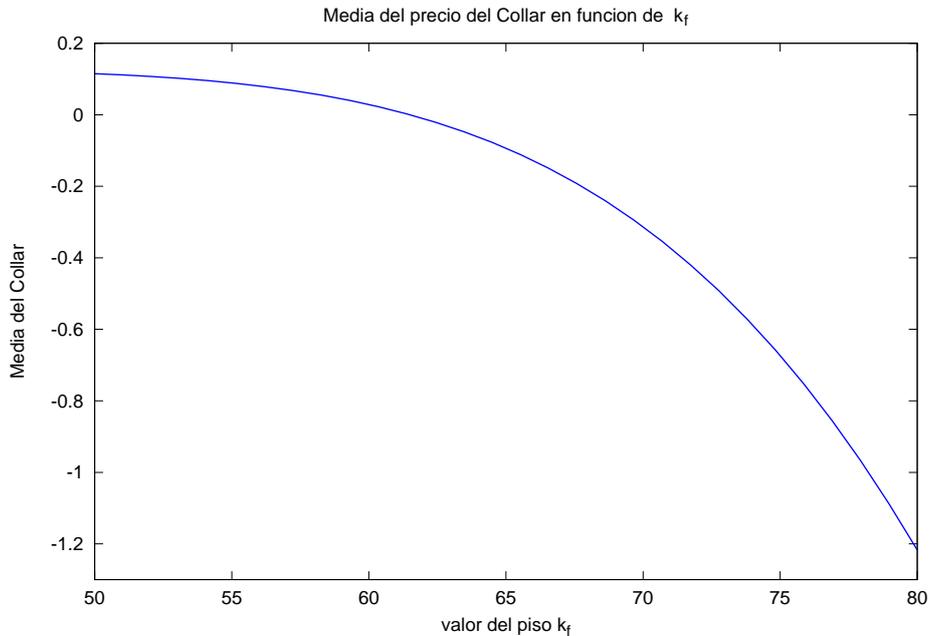


Figura 4: estimación de la media del Collar en función de k_f

simulaciones de los parámetros. Por ende, ahora suponemos que $k_f = 61,5$ y hagamos 10000 simulaciones de los parámetros, estimando la media y el desvío del Collar. Los resultados son mostrados en el cuadro 7.

En el cuadro 7 podemos observar que la variación del collar es mínima.

Con espíritu explorador, calculamos también el Collar con $k_f = 61,6$, también a partir de 10000 simulaciones a priori de los parámetros, los resultados que obtenemos son mostrados en el cuadro 8.

En resumen, podemos concluir que un valor justo de k_f para el contrato propuesto se encuentra entre 61,5 y 61,6 dolares por barril.

estimación	media	desvío
1	0.000383	0.00420
2	0.000355	0.00418
3	0.000341	0.00408
4	0.000443	0.00423
5	0.000314	0.00411

Cuadro 7: Cinco estimaciones independientes de la media y el desvío estimado del Collar a posteriori para $k_f = 61,5$.

media	desvío
-0.00185	0.00368

Cuadro 8: Media y desvío estimado del Collar a posteriori para $k_f = 61,6$.

Observación:

- Si bien k_f está en función de variables aleatorias, por ende es también una variable aleatoria, no es posible despejarla explícitamente de la ecuación $Collar(k_f) = 0$.
- Para revisar la estabilidad de la estimación se estudió la variabilidad del Collar con distintas distribuciones a priori de los parámetros. A modo de ejemplo, de forma exagerada para los resultados observados, tomamos $\sigma \sim U[0, 5]$, $v \sim U[0, 5]$ y $\rho \sim U[-1, 1]$ obtenemos para $k_f = 61,5$ la media y desvío del Collar mostrados en la tabla 9.

media	desvío
-0.00138	0.00295

Cuadro 9: Media y desvío estimado del Collar a posteriori para $k_f = 61,5$ y distribuciones a priori: $\sigma \sim U[0, 5]$, $v \sim U[0, 5]$ y $\rho \sim U[-1, 1]$.

7. Conclusiones

En el presente trabajo consideramos la modelación de precios de contratos a futuro sobre petróleo, basados en la metodología introducida por Heath, Jarrow y Morton (HJM) en [13].

Hemos presentado el marco general del modelo HJM, mediante un cambio de numerario, siguiendo lo expuesto en [16] para mercados de energía eléctrica, adaptamos los resultados del mercado financiero llevándolo al mercado de petróleo. La herramienta fundamental sobre la que se basa este modelo es el Cálculo Estocástico de Itô, cuya exposición se puede leer en [26], [21], [10] o [20] entre otros, una muestra simplificada puede leerse en [23].

El modelo H-J-M incluye una curva incógnita $(\sigma(t, \tau))$ que en la práctica se elige de una familia paramétrica, en nuestro caso unidimensional.

El numerario a su vez, es modelado introduciendo otros dos parámetros al modelo general. Obtenemos finalmente un modelo de tres parámetros.

En función de los datos hemos analizado tres métodos distintos de estimación de parámetros, donde tuvimos que tomar variadas decisiones:

- Contando con una serie de datos de futuros de petróleo desde el 3 de enero de 2006 al 21 de octubre de 2009, la estimación de las volatilidades ha mostrado ser inconsistente debido a la crisis del mercado petrolero en 2008. Como consecuencia hemos optado por trabajar con el período del 3 de junio de 2009 al 21 de marzo de 2009 donde se evalúan los distintos métodos de estimación. Dicho período se corresponde a un período de estabilización luego de la mencionada crisis. Si bien la cantidad de datos es considerablemente inferior, optamos por mantenerla pues se corresponde con un período relativamente similar a los períodos por los cuales se firman

contratos Collar^{j)}

- Habiendo concretado el período de datos históricos a considerar procedimos a la estimación de los parámetros según los tres métodos distintos desarrollados:

- El método directo de estimación es un buen indicador como punto de partida para la estimación, pero sin lugar a dudas una de las limitantes que presenta es que dicho método es jerárquico, admitiendo conocido σ para estimar v y luego admitiendo conocidos σ y v para estimar ρ . Esto lo hace no deseable y no tenemos seguridad que el vector $(\hat{\sigma}, \hat{v}, \hat{\rho})$ sea un buen estimador. Sumado a esto tenemos el inconveniente que para estimar v y ρ necesitamos tener datos equiespaciados en el tiempo, lo que nos lleva a considerar sólo la información de los días miércoles y quedarnos entonces con una muestra muy insignificante.

Ambos problemas, el de la no fiabilidad de la estimación y la equidistribución de los datos, son manejados en [16], donde se plantea que el método de estimación directo sólo es válido como punto inicial para obtener numéricamente el estimador de máxima verosimilitud.

- Para el método de máxima verosimilitud, los autores en [16] reconocen que es problemática la estimación y proponen un método iterativo sobre la maximización fijando en cada etapa un parámetro.

Al igual que en [16], en nuestro caso la estimación por máxima verosimilitud no es consistente, donde se encuentra una gran variabilidad de las estimaciones con pequeñas modificaciones del punto inicial. En este aspecto damos un paso adelante y estudiamos numéricamente la función de verosimilitud (o su logaritmo). Aquí obtenemos que existe un amplia región para los parámetros donde se obtienen valores muy

^{j)}El período de validez de un Collar en este contexto oscila entre 6 y 12 meses

cercanos al máximo. Incluso, según lo desarrollado en el Anexo B, vemos que bajo determinadas condiciones aproximadas, las cuales se verifican en nuestro caso (también de forma aproximada), la función de verosimilitud alcanza su máximo sobre toda una superficie.

En estas condiciones damos paso a la estimación bayesiana.

- La estimación bayesiana se realiza bajo lo que se conoce actualmente como estimación bayesiana empírica, es decir, en palabras simplificadoras, se usa parte de la información para dar las distribuciones a priori.

Tomamos los resultados obtenidos en la estimación directa y los valores que se acercan al máximo de la verosimilitud para dar cotas a las distribuciones a priori no informativas de los parámetros.

Uno de los logros importantes del presente trabajo es que el estimador paramétrico bayesiano, la media a posteriori, resulta ser lo suficiente robusto tanto considerando distintos períodos de datos como también variando distintas distribuciones a priori.

- Dada la problemática encontrada con la estimación de los parámetros se decidió trabajar con un modelo de volatilidades constantes.

Por último, nuestro interés se centraba en tratar de comparar nuestro modelo calibrado a un contrato real. Se presenta un ejemplo de contrato similar a los que recientemente compró la compañía petrolera estatal ANCAP, donde se considera un estimador bayesiano para el precio del Collar, el cual también resulta ser robusto ante variaciones de las distribuciones a priori.

Como resultado de los cálculos realizados con la modelación propuesta obtenemos que para firmar un compromiso tipo Collar durante 6 meses a partir del día 11 de enero de 2010, siendo el precio de “techo” $k_c = 120$ dólares por barril y no teniendo costo por un tal compromiso, el precio de “piso” justo que debe tener

el contrato es de $k_f = 61,5$ dólares por barril. El precio a la vista del barril en el momento de la firma del contrato es de 82,52 dólares.

Futuras líneas de desarrollo

Hay una gran diversidad de posibles desarrollos, algunos más directos que otros.

Una línea de trabajo accesible es la aplicación de otros modelos de volatilidad, incluso el Modelo Mercurio-Moraleta que generaliza los modelos Ho-Lee, Hull-With. Teniendo suficientes datos históricos de futuros, el método de estimación bayesiana parece ser un ámbito adecuado para trabajar la estimación, incluso si se agregan parámetros al modelo, cosa que complica significativamente en el método de máxima verosimilitud.

Es importante observar que la estimación bayesiana además de proveer métodos robustos para la estimación de parámetros, permite el tratamiento de modelos más complejos (aumentando, obviamente, el costo computacional).

Otra posible línea de desarrollo, contemplando la caída del precio del petróleo sufrida en 2008, es generalizar el trabajo con procesos gaussianos a trabajar de forma general con procesos de Levy. Evidentemente hay que trabajar cuidadosamente pero la posibilidad de saltos que proporciona este tipo de procesos parece ser el marco ideal para modelizar la crisis del 2008.

En el presente trabajo siempre se ha trabajado en base a una moneda común. Otra posible línea de desarrollo sería introducir una dinámica para modelizar la moneda local frente a la moneda extranjera, en la cual se fija el precio del petróleo.

De contar con información precisa sobre contratos futuros de la empresa petrolera estatal, creemos que la metodología desarrollada puede dar precios in-

dicativos del valor de dichos contratos.

Evidentemente existen muchos otros puntos de desarrollo, pero éstos son algunos de los que han surgido a lo largo del trabajo.

Anexos

A. Un método rápido para obtener k_f

En la subsección 6.2 se realizó la estimación del precio de piso k_f justo para un contrato especificado. En dicha subsección se desarrolló el tema partiendo que el Collar es una variable aleatoria, de ahí que se requiere una gran cantidad de cálculos y tiempo para obtener una estimación “razonable” para k_f .

Ahora bien, si no disponemos de tanto tiempo entonces una aproximación a dicho valor de k_f puede obtenerse usando la estimación a posteriori de los parámetros, según lo desarrollado en la subsección 6.1.3, teneos que la estimación a posteriori para los parámetros es:

σ	v	ρ
0.14	0.42	-0.75

Ahora bien, utilizando estos parámetros podemos obtener directamente el valor del Collar en las condiciones del ejemplo planteado 6.2.

La gráfica Collar en función de k_f para este caso puede verse en el gráfico 5, obtenemos un valor para $k_f = 61,609$

Concluimos que la estimación de k_f realizada usando el valor medio de los parámetros a posteriori no difiere significativamente de la estimación realizada haciendo variar los parámetros.

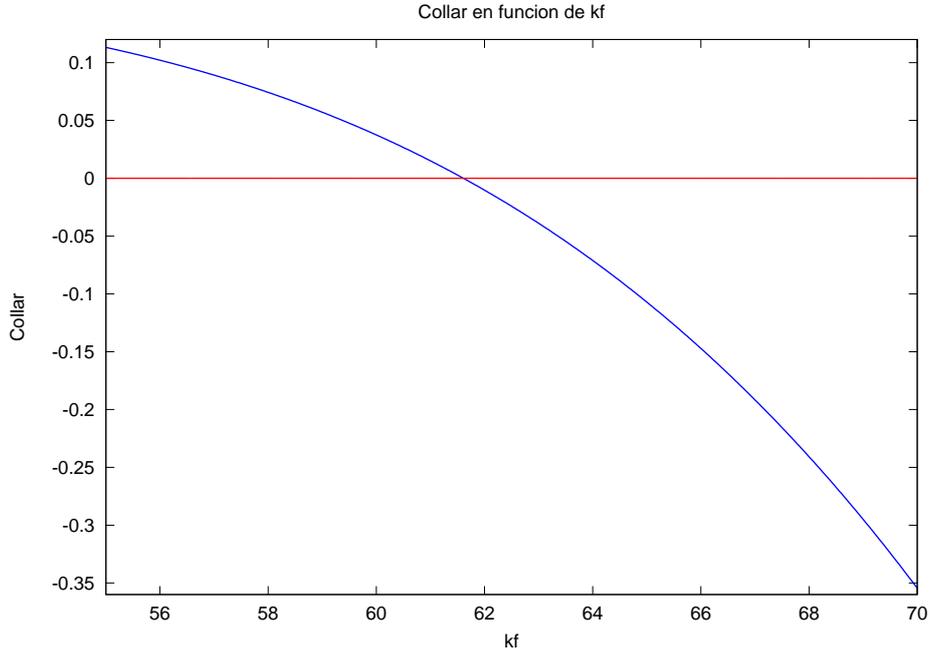


Figura 5: Gráfica del Collar en función de k_f para los valores estimados de los parámetros a posteriori.

B. Una aproximación a la máxima verosimilitud

Desarrollaremos a continuación una posible explicación por la cual no se puede maximizar la función de verosimilitud 58 de forma numérica. Los cálculos a continuación son aproximados.

Recordemos que

$$h_i = \sigma^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t)^2 dt + 2\sigma v \rho \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t) dt + v^2 (t_{i+1} - t_i)$$

Pensemos que $t_{i+1} - t_i = \delta_i$ es decir, que tenemos datos a tiempos equidistantes o mejor aún pensemos que δ_i es muy chico, al menos respecto a la distancia a la entrega $\tau - t_i$.

En nuestro caso, con datos diarios tenemos $\frac{\max\{t_{i+1} - t_i\}}{\tau - t_0} \cong 0,014$.

Ahora bien, con $t_{i+1} - t_i$ pequeño podemos aproximar las siguientes integrales por valor medio:

$$h_i = \underbrace{\sigma^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t)^2 dt}_{\cong \left(\tau - \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)^2 \delta_i} + 2\sigma v \rho \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t) dt}_{\cong \left(\tau - \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) \delta_i} + v^2 \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\delta_i}$$

Por lo tanto, siendo $d_i := \tau - \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$, tenemos

$$h_i \cong \delta_i \left[\sigma^2 (d_i)^2 + 2\sigma v \rho d_i + v^2 \right]$$

Hasta ahora supusimos $\delta_i = t_{i+1} - t_i$ pequeño, ahora:

$$d_0 = \tau - \frac{t_1 + t_0}{2}$$

$$d_1 = d_0 - \delta$$

⋮

$$d_i = d_0 - i\delta \cong d \quad (\text{con } \delta \text{ muy pequeño lo podemos suponer constante})$$

Por ende tenemos:

$$h_i \cong \delta \left[\sigma^2 d^2 + 2\sigma v \rho d + v^2 \right] =: h$$

Recordemos ahora el logaritmo de la verosimilitud, en función de h (no dependiendo de i):

$$\log(L(h)) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(h) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i + h/2)^2}{h}$$

derivando en función de h e igualando a cero obtenemos que el máximo se obtiene en:

$$\hat{h} = 2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\sum a_i^2}{n}}\right)$$

Ahora bien, tratemos de hallar los valores de σ , v y ρ que nos aseguren ese óptimo:

$$h = \delta \left[\sigma^2 d^2 + 2\sigma v \rho d + v^2 \right] = \hat{h}$$

$$(d\sigma - v)^2 + 2\sigma v d(\rho + 1) = \frac{\hat{h}}{\delta}$$

y por ende, para cada valor de ρ se obtiene que el máximo de la función de verosimilitud (aproximada) se da a lo largo de una superficie.

Por ejemplo, si $\rho = 0$ tenemos que $\{(\sigma, v) : d^2\sigma^2 + v^2 = \frac{\hat{h}}{\delta}\}$ son los puntos donde se obtiene el máximo.

El anterior razonamiento es aproximado y por ende podemos tomar a las conclusiones de forma aproximada. No obstante, recordemos que el método de máxima verosimilitud nos proporciona como estimador a aquél valor de los parámetros que hace más verosímil la obtención de nuestra muestra, si hay varias combinaciones de los parámetros que producen una valor de verosimilitud cercano al máximo, entonces el estimador será poco significativo.

C. Programación

A continuación se adjunta parte de la programación realizada en Octave.

Figura 6: Datos a usar en el trabajo

```
1  datos=[1, 4, 39967, 66.12, 67.09, 68.02, 68.86, 69.66, 70.46, 71.11,  
2  71.63, 72.11, 72.59, 73.06, 73.52; ... ];  
3  
4  
5  datos(:,3)=(datos(:,3)-39967)/365;  
6  
7  
8  entregas=(140+30*[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12])/365;  
9  
10 T=6;% la entrega  
11  
12  
13 ind=[1:length(datos(:,3))-1];  
14 ax=(log(datos(ind+1,3+T)./datos(ind,3+T)))';  
15 t1=(entregas(T)-datos(ind,3))';  
16 t2=(entregas(T)-datos(ind+1,3))';  
17  
18 %curva inicial del 10 de enero  
19 tiempo_curva_inic=[0.08; 0.16; 0.25; 0.33; 0.41; 0.49; 0.58; 0.66; 0.74;  
20 0.82; 0.9; 0.99; 1.07];  
21 precio_curva_inic=[82.52; 83.01; 83.55; 84.14; 84.70; 85.24; 85.70;  
86.16; 86.62; 87.06; 87.53; 87.86; 88.15];
```

Figura 7: Función para realizar la estimación directa de los parámetros.

```

1  function f =estimacion_parametros_metodo_directo(tiempo, entrega1,
2  entrega2, futuro1, futuro2)
3
4  %calcula los parámetros estimados para el método directo. tiempo son las
5  fechas medidas en años t_1,t_2,...t_n, entrega1 y entrega2 son las fechas
6  de entrega también medidas en años. futuro1 y futuro2 son los precios de
7  los futuros correspondientes a la fecha (tiempo) y a las entregas.
8
9  n=length(tiempo)-1;
10
11  delta=tiempo(2)-tiempo(1); %datos semanales o diarios
12
13  for i=1:n
14      a(i) = (log(futuro1(i+1)/futuro2(i+1))-log(futuro1(i)/futuro2
15      (i)))/(entrega2-entrega1)*sqrt(tiempo(i+1)-tiempo(i));
16      b(i) = ((entrega2+entrega1)*(tiempo(i+1)-tiempo(i))-(tiempo(i+1)
17      ^2+(tiempo(i))^2)/(2*sqrt(tiempo(i+1)-tiempo(i)));
18  endfor
19
20  s = sqrt((-n+sqrt(n^2+4*(a*a')*(b*b')))/2*(b*b'));
21
22  for i=1:n
23      d(i) = (log(futuro1(i+1)/futuro2(i+1))-log(futuro1(i)/futuro2
24      (i)))/(entrega2-entrega1)-((s^2)/2)*((entrega1+entrega2)*(tiempo(i+1)-
25      tiempo(i))-(tiempo(i+1))^2+(tiempo(i))^2);
26      c(i)=(log(futuro1(i+1)/futuro1(i))+((s^2)/6)*((entrega1-tiempo(i))
27      ^3-(entrega1-tiempo(i+1))^3)+d(i)*((entrega1-tiempo(i))^2-(entrega1-tiempo
28      (i+1))^2)/(2*(tiempo(i+1)-tiempo(i)))/sqrt(tiempo(i+1)-tiempo(i))
29      ;
30  endfor
31
32  v =sqrt(2*(-n+sqrt(n^2+n*delta*(c+(s^2)*(delta^(5/2))/24)*(c+(s^2)*
33  (delta^(5/2))/24')))/(n*delta)-(s^2)*(delta^2)/12);
34
35  for i=1:n
36      e(i) = (tiempo(i+1)-tiempo(i))*(v^2)/2-sqrt(tiempo(i+1)-tiempo(i))
37      *c(i);
38  endfor
39
40  p = ((e*d') /n)/(sqrt((d*d')/n)*sqrt( ((e*e')/n )-(s^2)*(delta^3)/12));
41
42  f=[s, v, p];
43  endfunction

```

Figura 8: Función para buscar los valores cercanos al máximo de la verosimilitud

```

1  %Obtención de la grilla para observar la verosimilitud
2
3  datos;
4
5  for T=1:12
6
7  ind=[1:length(datos(:,3))-1];
8  ax=(log(datos(ind+1,3+T)./datos(ind,3+T)))';
9  t1=(entregas(T)-datos(ind,3))';
10 t2=(entregas(T)-datos(ind+1,3))';
11
12
13
14 m=20;
15 s=linspace(0,1,m)';
16 v=linspace(0,1,m)';
17 p=linspace(-1,0,m)';
18 maxim=[0,0,0,0];
19     for k=1:m
20         for i=1:m
21             for j=1:m
22                 h=(s(i)^2)*(t1.^3 - t2.^3)+(s(i)*v(j)*p(k))*(t1.^2-t2.^2)+(v(j)^2)
23                 *(t1-t2);
24                 L(i,j,k)=log(prod(normpdf(ax,-0.5*h,sqrt(h)))) ;
25                 if (L(i,j,k)>maxim(1))
26                     maxim=[L(i,j,k),s(i),v(j),p(k)];
27                 endif
28             endfor
29         endfor
30     endfor
31     parame(T,:)=maxim;
32
33
34 med_s=mean(parame(:,2))
35 var_s=var(parame(:,2))
36
37
38 med_v=mean(parame(:,3))
39 var_v=var(parame(:,3))
40
41
42 med_p=mean(parame(:,4))
43 var_p=var(parame(:,4))
44
45

```

Figura 9: Función para la estimación baesiana de los parámetros.

```

1  function f =estim_bayesiana_posteriori(T, cant_simulaciones)
2
3      %T nos indica el més de entrega que usamos de los datos.
4      cant_simulaciones es la Cantidad de simulaciones que se realizan para
5      obtener la media a posteriori de los parámetros y sus desvíos.
6
7      datos_a_usar_tesis; %leemos los datos de la muestra a usas,
8      además los transformá para usar directamente.
9
10     for i=1:cant_simulaciones
11         s=0.3*rand;
12         v=0.2*rand+0.3;
13         p=0.5*rand-1;
14         theta(:,i)=[s,v,p];
15         h=(s^2)*(t1.^3 - t2.^3)+(s*v*p)*(t1.^2-t2.^2)+(v^2)*(t1-
16         t2);
17         L(i)=prod(normpdf(ax,-0.5*h,sqrt(h))) ;
18     endfor
19
20     f=[theta(1,:)*L', theta(1,:).^2*L'-(theta(1,:)*L')^2/sum(L), theta(2,:)
21     *L',theta(2,:).^2*L'-(theta(2,:)*L')^2/sum(L), theta(3,:)*L', theta
22     (3,:).^2*L'-(theta(3,:)*L')^2/sum(L)]/sum(L);
23 endfunction

```

Figura 10: Función para la obtención del precio del Collar

```

1  function f =collar_estim_bayesiana_for(T1,T2,r, kc,kf,tiempo_curva_inic,
    precio_curva_inic, cant_simulaciones)
2
3      %De T1 a T2 es la validéz del contrato con una tasa de interés r.
    K_c y K_f son los precios de techo y piso resp. tiempo_curva_inic y
    tiempo_curva_inic son vectores que deben tener los datos para la curva
    inicial al día del contrato (t=0). cant_simulaciones es un natural
    que dice cuantas simulaciones se quieren hacer para la estimación.
4
5      datos_a_usar_tesis; %leemos los datos de la muestra a usas,
    además los transforma para usar directamente.
6      med_s=0.045; var_s=0.01; med_v=0.42; var_v=0.01;
    med_p=-0.8;medd_p=med_p+1; var_p=0.01;
7
8      %Partición donde integrar y norma de la partición. se parte en
    10000 intervalitos:
9      t=linspace(T1,T2,10000)';
    delta=(t(2)-t(1));
10
11
12     %Precio de la curva inicial en los puntos de la partición:
13     precio=spline(tiempo_curva_inic, precio_curva_inic,t);
14     for i=1:cant_simulaciones
15         s=0.3*rand;
16         v=0.2*rand+0.3;
17         p=0.5*rand-1;
18         h=(s^2)*(t1.^3 - t2.^3)+(s*v*p)*(t1.^2-t2.^2)+(v^2)*(t1-
    t2);
19         L(i)=prod(normpdf(ax,-0.5*h,sqrt(h))) ;
20         D=sqrt((s^2)*(t.^3)/3+(s*v*p)*(t.^2)+(v^2)*t );
21         Collar(i)=sum((delta)*exp(-r.^t).*(precio.*(normcdf((1./
    D).*(log(precio/kc)+.5*D.^2),0,1)-normcdf((1./D).*(log(precio/kf)
    +.5*D.^2))+1)-kc*normcdf((1./D).*(log(precio/kc)+.5*D.^2)-D,0,1)+kf*
    (normcdf((1./D).*(log(precio/kf)+.5*D.^2)-D,0,1)-1)));
22     endfor
23
24
25     %media y desvío del collar
26     f=[ (Collar*L')/sum(L) ,sqrt( (((Collar.^2)*L')/sum(L) ) - ((Collar*L')/
    sum(L))^2)];
27 endfunction

```

Figura 11: Función para obtener el valor justo de k_f en el contrato fijado.

```

1  function f =collarkf(T1,T2,r,
2  kc,kfinicial,kffinal,s,v,p,tiempo_curva_inic, precio_curva_inic)
3
4      %De T1 a T2 es la validéz del contrato con una tasa de interés r.
5      K_c es el precio de techo. kfinicial y kffinal dan un intervalo donde kf
6      tomará los valores. tiempo_curva_inic y tiempo_curva_inic son vectores
7      que deben tener los datos para la curva inicial al día del del contrato
8      (t=0).cant_simulaciones es un natural que dice cuantas simulaciones se
9      quieren hacer para la estimación.
10
11     datos_a_usar_tesis; %leemos los datos de la muestra a usas,
12     además los transforma para usar directamente.
13
14     %Partición donde integrar y norma de la partición. se parte en
15     10000 intervalitos:
16     t=linspace(T1,T2,10000)';
17     delta=(t(2)-t(1));
18     kf=linspace(kfinicial,kffinal,1000)';
19     %Precio de la curva inicial en los puntos de la partición:
20     precio=spline(tiempo_curva_inic, precio_curva_inic,t);
21     D=sqrt((s^2)*(t.^3)/3+(s*v*p)*(t.^2)+(v^2)*t );
22     for i=1:length(kf)
23         Collar(i)=sum((delta)*exp(-r.^t).*(precio.*(normcdf((1./D).*(log
24         (precio/kc)+.5*D.^2),0,1)-normcdf((1./D).*(log(precio/kf(i))+.5*D.^2))+1)-
25         kc*normcdf((1./D).*(log(precio/kc)+.5*D.^2)-D,0,1)+kf(i)*(normcdf((1./D).*(
26         log(precio/kf(i))+.5*D.^2)-D,0,1)-1)));
27     endfor
28
29     f=kf(Collar.^2==min(Collar.^2));
30     plot(kf,Collar, 'linewidth',2, kf,0*kf, 'linewidth',2,"1");
31     title('Collar en función de kf');
32     xlabel('kf');
33     ylabel('Collar');
34 endfunction

```

Referencias

- [1] T. Björk. Interest Rate Theory, volume 1656 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1996.
- [2] W.M. Bolstad. Introduction to Bayesian Statistics. Wiley-Interscience. 1943.
- [3] D. Brigo and F. Mercurio. Interest rate models: theory and practice. Springer, 2007.
- [4] E. Broszkiewicz-Suwaj and A. Weron. Calibration of the multi-factor HJM model for Energy Market. 2006.
- [5] C. Chiarella and Oh Kang Kwon. A class of Heath-Jarrow-Morton term Structure Models with Stochastic Volatility. School of Finance and Economics, University of Technology Sydney.
- [6] J.C. Cox , J.E. Ingersoll and S.A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* 53: 385–407, 1985.
- [7] F. Espen Benth, J. Saltyte Benth, S. Koekebakker. Stochastic modelling of electricity and related markets. World Scientific. 2008.
- [8] J. García Quesada. Tutorial de Análisis Numérico, Interpolación : Splines cúbicos. Departamento de Informática y Sistemas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2000.
- [9] A. Gelman, J.B. Carlin, H. S. Stern and D.B. Rubin. Bayesian Data Analysis. Chapman & Hall. 2004.
- [10] I. Karatzas, S. E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer, 1991.

- [11] T. Lyse Hansen and B. Astrup Jensen. Options on Energy Portfolios in an HJM Framework. Department of Finance, Copenhagen Business School, Solbjerg Plads 3, DK-2000 Frederiksberg.
- [12] M. Haugh. The Heath-Jarrow-Morton Framework. 2005.
- [13] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. *Econometrica*, 60, 1 (1992), 77-105.
- [14] Marc Henrard. Bermudan Swaptions in Gaussian HJM One-Factor Model: Analytical and numerical approaches. 2008
- [15] Hinz, Juri, Von Grafenstein, Lutz, Verschuere, Michel and Wilhelm, Martina (2005) “ Pricing electricity risk by interest rate methods”, *Quantitative Finance*, 5: 1, 49 - 60.
- [16] Hinz, Juri and Wilhelm, Martina “Pricing flow commodity derivatives using fixed income market techniques” (2006), *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol. 9, No. 8 (2006) 1299 - 1321.
- [17] T.S.Y. Ho, S.B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* 41, 1986.
- [18] J. Hull and A. White. Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, Vol 3, No. 4 pp. 573–592, 1990.
- [19] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall, 1997.
- [20] R. S. Liptser, A. N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes: General theory*. Springer, 1974.
- [21] P. Medvegyev. *Stochastic integration theory*. Oxford Mathematics, 2007.

- [22] F. Mercurio and J. Moraleda. A Family of Humped Volatility Structures. Tinbergen Institute Discussion Paper TI 96-169/2, Erasmus University Rotterdam, 1996.
- [23] T. Mikosch. Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View. World Scientific, 2000.
- [24] J. Monge. A Practical Implementation of the Heath–Jarrow–Morton Framework. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2007.
- [25] M. Musiela and M. Rutkowski. Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, 1998.
- [26] B. Oksendal. Stochastic Differential Equations, An introduction with Applications. Springer-Verlag, 1989.
- [27] R. Tempone Olariaga. Numerical Complexity Analysis of Weak Approximation of Stochastic Differential Equations. Royal Institute of Technology, Stockholm 2002.
- [28] O. Vasicek. An Equilibrium Characterisation of the Term Structure. Journal of Financial Economics 5: 177–18, 1977.