



Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República



Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática

Director: Ernesto Mordecki

Co-Director: Alejandro Pena

---

# Valuación de opciones en mercados de Lévy

Con Enfoque en Riesgo Cambiario Crediticio en el Uruguay

---

Andrés Sosa

AGOSTO 2011  
MONTEVIDEO - URUGUAY



## **Dedicatoria**

El trabajo que he desempeñado en esta tesis es dedicado a mis padres cuyo cariño ha sido fuente de inspiración constante. Son las personas que me han acompañado siempre... en las buenas y en las no tan buenas. A papá, que admiro su energía diaria en post de mis objetivos. A mamá, que su palabra a tiempo, ha sido y será de gran valor para mí.

A dos personas, que en este largo camino, no se encuentran más conmigo. Al abuelo Garrapo y al tío Julián. Siempre recordaré sus muestras de grandeza.

## **Agradecimientos**

Primero que nada, quiero agradecer a Ernesto Mordecki, que desde finales del año 2007, se convirtió en pilar fundamental para mi desarrollo académico y personal, enseñándome de manera implícita los valores de la docencia. Además su calma, entrega y dirección me posibilitaron alcanzar todos los objetivos trazados en la tesis.

A Sole, por su optimismo natural que constantemente me estimula a seguir adelante. Además de permanecer junto a mí en todos los momentos.

A toda mi familia, que me han sido de gran importancia para mí, al brindarme todo su apoyo a lo largo del tiempo.

A mis amigos del barrio, por los grandes momentos vividos juntos. En especial, a “mi hermano” el Chupete.

A mis amigos de la facultad, por hacerme el aguante en los momentos más difíciles de la carrera. Por las grandes jornadas de estudio en equipo.

A Alejandro Pena por sus valiosos aportes a este trabajo.

A los integrantes de la SCAPA de Ingeniería Matemática por el respeto y la colaboración que me han brindado en todo momento.

A todos ellos y a todos los que participaron de manera directa o indirecta en este trabajo, mi eterno agradecimiento.



## Resumen

*Algunas economías emergentes presentan una alta dolarización financiera, que a diferencia de los países desarrollados determina que su sistema bancario se exponga a otros tipos de riesgo que los usuales.*

*El riesgo cambiario crediticio se define como la pérdida esperada derivada del hecho de prestar en moneda extranjera a agentes que tienen sus ingresos principalmente en moneda local.*

*El objetivo del trabajo consiste en estudiar la valuación de opciones en mercados de Lévy con aplicaciones al mercado Eur/Usd y en la medición del riesgo cambiario crediticio en el Uruguay.*

*La profundidad del mercado de opciones sobre divisas depende de las monedas que participen y tiene como consecuencia que ciertas metodologías no se puedan aplicar en algunos casos. Al no existir un mercado de opciones desarrollado en el Uruguay, nos trasladamos al tipo de cambio Eur/Usd. Esta alternativa tiene el objetivo de aplicar los dos procedimientos disponibles: (a) estimación de máxima verosimilitud y transformada de Esscher a partir de datos estadísticos; (b) calibración a partir de precios de opciones. Se pretende formar una idea de la calidad del punto (a) aplicado al caso Usd/Uy, único procedimiento disponible visto la naturaleza del mercado.*



# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Matemática Financiera . . . . .	9
1.2. Opciones de compra europeas . . . . .	10
1.3. Reseña histórica . . . . .	11
1.4. Situación empírica . . . . .	13
1.5. El mercado de divisas . . . . .	14
1.5.1. Contratos a plazo en divisas . . . . .	15
1.6. Proponemos . . . . .	16
<b>2. Mercados Incompletos</b>	<b>17</b>
2.1. Preámbulo . . . . .	17
2.2. Teoremas fundamentales . . . . .	19
2.3. Mercados Incompletos . . . . .	20
2.4. Regla de Precios . . . . .	21
<b>3. Procesos de Lévy</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Ejemplos de Procesos de Lévy . . . . .	29
3.3. Medida de saltos . . . . .	31
3.4. La descomposición de Lévy-Itô . . . . .	33
3.5. Medidas equivalentes . . . . .	35
<b>4. Estimación y calibración</b>	<b>37</b>
4.1. Semi-martingalas . . . . .	37
4.2. Modelos exponenciales de Lévy . . . . .	40
4.3. Estimación por Máxima Verosimilitud . . . . .	41
4.4. La transformada de Esscher . . . . .	42

## ÍNDICE GENERAL

---

4.5. La transformada de Fourier . . . . .	43
4.5.1. Método de Carr y Madan . . . . .	44
4.6. Calibración . . . . .	46
<b>5. Merton Jump Diffusion y Variance Gamma</b>	<b>49</b>
5.1. Modelo de Merton (MJD) . . . . .	49
5.2. Subordinadores . . . . .	51
5.3. Procesos Estables Temperados . . . . .	52
5.4. Variance Gamma (VG) . . . . .	53
5.5. Volatilidad Implícita . . . . .	54
<b>6. Aplicación al Eur/Usd</b>	<b>57</b>
6.1. Preliminar . . . . .	57
6.2. Historia del Dólar y del Euro . . . . .	57
6.3. Datos de opciones Eur/Usd . . . . .	59
6.4. Precios de opciones vía la Transformada de Esscher . . . . .	60
6.4.1. Estimación histórica de la probabilidad del VG . . . . .	61
6.4.2. Aplicación de la transformada de Esscher . . . . .	61
6.4.3. Precios de opciones . . . . .	62
6.5. Calibración del modelo MJD . . . . .	63
6.6. Calibración del modelo VG . . . . .	65
6.7. Resultados y algoritmos . . . . .	66
<b>7. Riesgo Cambiario Crediticio en el Uruguay</b>	<b>69</b>
7.1. Sistema financiero uruguayo . . . . .	69
7.2. Intermediarios financieros . . . . .	71
7.3. Actividades que desarrollan . . . . .	71
7.4. Riesgo Cambiario Crediticio . . . . .	73
7.5. El sistema bancario en Uruguay . . . . .	74
<b>8. Conclusiones y eventuales extensiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Introducción

---

## 1.1. Matemática Financiera

LA matemática financiera es la aplicación de métodos matemáticos a la solución de problemas financieros. Se basa en herramientas de matemática aplicada, informática, estadística y teoría económica. Los bancos comerciales, bancos de inversión, las compañías de seguros y las agencias reguladoras aplican estos métodos a los problemas financieros como lo son la valuación de derivados, la estructura de portafolio, la gestión de riesgos y la simulación de escenarios posibles. El análisis cuantitativo ha traído la eficiencia y el rigor de los mercados financieros y se ha convertido en preocupación del regulador.

Las finanzas, como un sub-campo de la economía, se ocupan de la valuación de activos e instrumentos financieros, así como de la asignación de recursos. Siglos de historia y de experiencia han producido teorías fundamentales sobre el funcionamiento de las economías y la manera de valorar los activos disponibles. La matemática se torna de gran importancia ya que permite modelar las relaciones entre las diferentes variables y representar su aleatoriedad de manera que conduzcan a un análisis de interés.

La matemática financiera se basa en disciplinas como la teoría de la probabilidad, estadística, programación y ecuaciones diferenciales parciales para proporcionar modelos y derivar las relaciones entre las variables fundamentales como lo son el precio de activos, los movimientos del mercado y las tasas de interés. Estas herramientas, nos permiten obtener conclusiones que pueden ser de otra manera difíciles de encontrar, especialmente con la utilización de nuevas técnicas computacionales que aceptan almacenar grandes cantidades de datos y modelar muchas variables al mismo tiempo, brindando la resolución de sistemas muy grandes y complicados.

## 1.2. Opciones de compra europeas

---

Relativamente poca teoría fue escrita sobre la valuación de opciones hasta la aparición en 1900 de Louis Bachelier, donde en su tesis [1] modeló los precios de los activos con riesgo mediante el movimiento browniano, pero teniendo como desventaja que los precios pudieran asumir valores negativos. Luego de este evento, se avanzó mucho en la investigación en esta área, hasta que en el año 1960 Samuelson propuso al movimiento browniano geométrico como modelo para los precios sujetos a incertidumbre.

En 1973 apareció, tal vez, el resultado teórico más importante en el estudio de la valuación de opciones, cuando Fisher Black y Myron Scholes publicaron el artículo [2]. El modelo también asume el movimiento browniano geométrico para la evolución del precio y mediante algunos supuestos extras arribaron a una ecuación diferencial en derivadas parciales. La solución de dicha ecuación, proporciona la relación entre el valor de la opción y las otras variables del mercado. Este análisis también otorga la estrategia completa para la gestión de la inversión.

Este modelo es un excelente ejemplo de la interacción entre la matemática y la teoría financiera, que condujo a una visión sorprendente de la naturaleza del precio de las opciones, por el cual Robert Merton y Myron Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997.

## 1.2. Opciones de compra europeas

EL objetivo de este trabajo es estudiar la valuación del derivado financiero llamado opción. Este contrato vincula dos agentes, el beneficiario y el vendedor. Al negociar una opción en tiempo  $t = 0$ , el beneficiario tiene el derecho (pero no la obligación) a comprar una unidad de stock a un precio prefijado  $K$  llamado precio del ejercicio (strike) hasta o en un tiempo  $t = T$  llamado tiempo de madurez. Si el derecho a compra sólo se puede ejercer en  $t = T$  la opción de compra (call) se llama europea; en cambio si el derecho se puede ejercer en cualquier  $t \leq T$  la opción de compra se llama americana. Por supuesto, también existen los derechos a venta que se llaman opciones de venta (put) y son europeas o americanas dependiendo de las características antes mencionadas. Nosotros vamos a restringir nuestro estudio a las opciones de compra europeas, las cuales tienen como función de

### 1.3. Reseña histórica

---

pago, donde  $S_T$  es el precio del activo en el tiempo de madurez, a la función

$$h(S_T) = (S_T - K)^+ = \max(0, S_T - K).$$

El estudio de este tipo de derivado financiero se considera fundamental para la construcción de nuevas funciones de pago de estructuras más sofisticadas. Además, los derivados financieros de característica europea más utilizados en los mercados financieros son combinaciones lineales de un número finito de contratos call y put.

### 1.3. Reseña histórica

A pesar de la creencia general que la utilización de las opciones se ha desarrollado en el siglo *XX*, la historia de los contratos de opciones se remonta a tiempos ancestrales. La primera referencia textual de la negociación de una opción la realizó Aristóteles en su libro denominado “Politics” (350 A.C.), donde explica como en el siglo *VII* A.C., Thales de Mileto obtuvo una gran ganancia al especular en la cosecha de olivo del verano siguiente. Thales, gracias a sus conocimientos en meteorología, pronosticó una gran cosecha de aceitunas (en oposición al resto) y con una pequeña suma de dinero alquiló todas las prensas de olivo en Mileto y en Quiños a sus dueños. Al llegar la temporada y observar la abundancia de cosecha Thales vendió sus derechos a los dueños de la maquinaria.

Otra referencia textual, aunque más discutida por sus propiedades, se encuentra en la Biblia (Génesis 29) en el cual Jacob le compra a Laban el derecho a casarse con su hija Rachel en siete años a cambio de trabajo forzoso durante dicho período.

Más adelante en el tiempo, el desarrollo de este tipo de contratos fue consecuencia de la expansión de los centros urbanos y del comercio. Los agentes de las ciudades necesitaban contratar a plazo los productos agrícolas para cultivos antes de la cosecha. A mediados del siglo *XVI*, Antwerp (Bélgica) se ubicó como el centro del comercio de commodities por excelencia, negociándose opciones sobre el precio de la sal y del arenque, los cuales eran solamente negociados por especuladores. Durante los siglos *XVII* y *XVIII*, se convirtieron las ciudades de Amsterdam y Londres en grandes centros financieros. En estas ciudades se utilizaron una gran cantidad de contratos diferenciados por sus propiedades, desde los más especulativos e informales como lo eran “las promesas y cupones” hasta los contratos formales escritos

### 1.3. Reseña histórica

---

ante notarios y firmados por sus respectivos dealers. Estos últimos contratos contenían las características esenciales de las operaciones de cambio de los mercados de derivados actuales y debieron ser los primeros mercados en ser regulados a causa de las malas prácticas de los participantes. En Inglaterra los derivados tuvieron un gran auge durante este período, pero el comercio de manera excesiva en opciones encadenó el mayor colapso financiero de este país del siglo *XVIII*. En este momento, Francia se transformó en el principal centro financiero pero a diferencia de los dos anteriores carecía de una bolsa central desarrollándose el comercio en diferentes lugares alrededor de París. En el siglo *XIX*, en Europa el comercio de opciones se expandió a una gran cantidad de lugares a causa de las emisiones destinadas en la construcción de ferrocarriles y canales y en la expansión industrial existente.

En Estados Unidos, el comercio de opciones estuvo presente desde el final del siglo *XVIII* en intercambios de valores, sin embargo antes de su independencia ya existían en mercados de productos. Estas eran diferentes a las empleadas en Europa, a causa que estaban desarrolladas con precio de ejercicio fijo pero el tiempo de madurez eran en cualquier instante y las primas eran pagadas por anticipado. Por diversas razones, entre ellas una historia de abusos especulativos, la negociación de opciones se realizó en una baja proporción en el siglo *XIX* a consecuencia que la mayoría de las bolsas americanas habían prohibido su negociación.

Con respecto a la valuación de estos contratos, hasta el siglo *XIV* los participantes del mercado tenían una comprensión muy sutil, que fue desarrollada a través del tiempo mediante la experiencia. Las primeras evidencias indican que las opciones se utilizaron principalmente para especular y no para la gestión del riesgo efectivo absorbido por los participantes. En su gran mayoría, reflejaban una ventaja general de precios para los emisores. En el siglo *XVII* se basaban en la oferta y demanda de estos contratos para fijar su precio, siendo estos los primeros indicios de la comprensión de la paridad call-put, realizando ganancias por arbitraje. Este mecanismo fue empleado por las bolsas de valores del mundo en los siglos posteriores para la valuación, obteniendo ganancias en la compra y en la venta de contratos. A principios del siglo *XX*, comenzaron los primeros modelos simples de valuación de opciones hasta que en el año 1973 apareció la fórmula de Black Scholes.

Estamos en condiciones de concluir que, hasta finales del siglo *XIX*, tanto en Europa como en Estados Unidos las opciones de comercio era una actividad relativamente impenetrable para la población al encontrarse limi-

#### 1.4. Situación empírica

---

tada a un grupo especializado de comerciantes. Esta situación comenzó a revertirse a principios del siglo *XX*, motivado gracias al estudio teórico en el tema y a los avances obtenidos. La década de 1970 se caracterizó por el gran desarrollo de contratos financieros a futuro, creciendo mucho más allá de sus orígenes agrícolas.

Hoy en día, los mercados de contratos a plazo desempeñan un papel importante en el sistema financiero mundial con el comercio de más de 1,5 billones de dólares por día. Actualmente el mayor mercado de futuros y opciones es el CME Group creado en 2007 de la fusión de Chicago Mercantile Exchange y Chicago Board of Trade. En CME Group se negocian a diario diversos tipo de instrumentos financieros tales como los derivados sobre tasas de interés, acciones, divisas y commodities.

#### 1.4. Situación empírica

EN las últimas décadas del siglo *XX*, se avanzó en el objetivo de disponer de gran cantidad de base de datos de alta frecuencia y confiables de precios de activos financieros. La aplicación de métodos computacionales para el análisis de sus propiedades ha desarrollado un nuevo horizonte de investigación en la situación empírica de la evolución general de activos.

A pesar que la mayoría de los activos son influenciados por distintos conjuntos de información a causa de pertenecer a diferentes mercados financieros, las variaciones aleatorias de procesos comparten algunas propiedades estadísticas. Sin embargo, el hecho de realizar modelos matemáticos teniendo en cuenta estas propiedades nos favorece al generalizar los resultados a otros activos pero nos perjudica en perder precisión en casos individuales.

La evolución de los precios de mercado es observada mediante series de tiempo, medido en cierta escala de incrementos constantes pero al variar dicha escala, se cumple que la distribución estimada cambia sus propiedades de forma notoria. Otra característica importante en las series financieras es su gran variabilidad, causado principalmente por eventos políticos y económicos, provocando que la distribución empírica de los retornos posea colas pesadas, de curtosis positiva, obteniendo que el decaimiento a infinito sea lento. Esta propiedad trae consigo que grandes movimientos tengan probabilidades no nulas de ocurrencia, generando presencia de saltos en la

## 1.5. El mercado de divisas

---

evolución del precio del activo. Estos grandes movimientos en el precio, lejos de ser descartados por los participantes del mercado, centran su atención dado que sus magnitudes pueden representar una fracción importante de la rentabilidad del período.

También se observa que existen asimetrías entre las pérdidas y las ganancias obtenidas por los participantes a causa de existir grandes saltos descendentes en el precio de los activos pero no existir generalmente saltos ascendentes de estas características debido al crecimiento moderado (principalmente en el mercado de acciones y commodities).

## 1.5. El mercado de divisas

EN todo el trabajo utilizaremos el tipo de cambio que se emplea entre distintos países como activo sujeto a incertidumbre. En esta sección desarrollamos las características de este mercado con el fin de comprender su funcionamiento.

Dado que la mayoría de los países tienen su propia moneda, el gran desarrollo del comercio internacional y el actual crecimiento en la movilidad de capitales torna indispensable la existencia de una relación entre las monedas.

Se define el tipo de cambio como el precio de una moneda en términos de otra. Este valor se tornó de suma importancia para los países al afectar los precios relativos de los artículos domésticos en relación a los extranjeros. Cuando la moneda doméstica se deprecia los artículos domésticos en el extranjero son más baratos y a su vez los artículos importados en el país se tornan más caros mejorando la competitividad del país. En cambio, una apreciación de esta moneda dificulta la exportación de los productos domésticos y aumenta la competencia de productos en el país mediante el ingreso de productos extranjeros que tienen inferior costo de producción.

Existe una gran cantidad de variables que juegan un rol importante sobre la determinación del tipo de cambio. Algunas de ellas son las tasas de interés tanto domésticas como extranjeras, la inflación, las barreras al comercio, la productividad del país, la demanda de productos importados y exportados y la oferta monetaria existente. Estas variables tienen la característica de ser muy dependientes de sus expectativas futuras y varían al solo hecho de ingresar nueva información al mercado por lo cual cualquier cambio en al-

## 1.5. El mercado de divisas

---

guna de ellas implica una supuesta variación en el tipo de cambio. Además el tipo de cambio se ve influido por flujos monetarios reales provocados por su oferta y su demanda. Estas características tienen como consecuencia una gran fluctuación del tipo de cambio en el transcurso del tiempo.

El mercado de divisas está organizado como un mercado “over the counter” en el cual existen una gran cantidad de agentes alrededor del mundo, por ejemplo bancos, que compran y venden grandes cantidades de moneda. Este mercado tiene la característica de ser muy competitivo por lo cual, en efecto práctico, funciona como si fuera un mercado centralizado.

A su vez, los bancos centrales también desempeñan un papel importante en este mercado. Su principal objetivo es controlar la oferta monetaria, inflación y/o las tasas de interés de la moneda de su país y a menudo imponen o dirigen las tasas de cambio utilizando sus reservas internacionales para estabilizar el mercado doméstico.

### 1.5.1. Contratos a plazo en divisas

El activo subyacente en este tipo de contratos es una cierta cantidad de unidades de moneda extranjera y definimos  $S_0$  como el precio actual de una unidad de dicha moneda. Estos contratos son principalmente comercializados en el mercado over the counter al presentar la capacidad de adaptarse a la conveniencia de los participantes. Sin embargo, existen futuros y opciones tanto europeas como americanas que se tranzan en mercados organizados aunque en proporción mucho más pequeña que la anterior.

La moneda doméstica se puede invertir en el mercado local a una tasa de interés libre de riesgo  $r$  mientras tanto la moneda extranjera se puede invertir a una tasa de interés libre de riesgo  $q$  del país en cuestión. Esta característica tiene como consecuencia que las divisas son consideradas como un activo que paga la tasa de interés  $q$  como dividendo.

Utilizando resultados teóricos de la valuación de contratos de activos que pagan dividendos, que se derivan mediante la ausencia de arbitraje, obtenemos que valorar una opción europea con precio actual del subyacente  $S_0$  que paga dividendos  $q$  es igual que valorar una opción europea con precio actual  $S_0e^{-qT}$  que no paga dividendos.

### 1.6. Proponemos

AL analizar la situación empírica de la sección 1.4 y las características del tipo de cambio expuestas en la sección anterior se torna evidente que los modelos de difusión, como lo es el modelo de Black-Scholes, no conforman un adecuado método de valuación de opciones. En dicho modelo, el precio de la opción es únicamente definido porque si se modifica el drift en el modelo se cambia solamente las probabilidades de los eventos pero si se cambia la volatilidad se genera un proceso diferente al anterior. Obtenemos que existe una única medida de martingala equivalente a la histórica y por lo cual el precio de la opción es único.

En este trabajo proponemos utilizar modelos que abarcan los procesos de Lévy, más precisamente modelos exponenciales de Lévy. Ellos surgen, al imitar el procedimiento desarrollado en la Fórmula de Black-Scholes, que modela el precio del activo que paga dividendos  $q$  como una exponencial de un movimiento browniano con drift. Este proceso, no es más que un proceso de Lévy de características particulares, por lo cual podemos sustituirlo por un proceso de Lévy general. Entonces modelamos el activo subyacente como

$$S_t = S_0 e^{\hat{X}_t}, \quad (1.1)$$

donde  $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy cualquiera.

Como veremos más adelante, este tipo de procesos solucionan algunos de los inconvenientes mencionados en la sección anterior dado que las distribuciones de los procesos de Lévy son asimétricas y tienen colas pesadas. Además, se caracterizan por ser procesos discontinuos que modelan de buena manera los saltos bruscos que existen en el precio de algunas divisas.

# Mercados Incompletos

---

## 2.1. Preámbulo

EN el transcurso de este capítulo consideraremos mercados cuya posible evolución entre  $t = 0$  y  $t = T$  es descripta mediante el espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$ , donde  $\mathcal{F}$  contiene todas las declaraciones que se pueden realizar sobre el comportamiento del precio del activo entre el tiempo 0 y  $T$ . Sea  $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$  la filtración generada por el flujo de información histórica del activo hasta  $t = T$ , la cual cumple que  $\mathcal{F}_0$  no contiene información alguna y  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ .

Entonces trabajaremos en el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  donde la probabilidad de ocurrencia de los eventos aleatorios cambiará con el transcurso del tiempo de acuerdo al arribo de nueva información del mercado. Sin embargo, en lugar de variar la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  para todo el tiempo, se mantendrá fija y el impacto de información en la probabilidad de los eventos se ocasionará al condicionar con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$ .

La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}$  generada en  $[0, T] \times \Omega$  por todos los procesos adaptados continuos a la izquierda es llamada la  $\sigma$ -álgebra predecible. Por lo cual, podemos definir que  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico predecible si es medible con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}$ . Intuitivamente, el valor de  $X_t$  es anunciado mediante los valores del proceso en los instantes precedentes. Este tipo de procesos, observaremos a continuación, modelan las decisiones de los inversores.

Consideramos un mercado de dos activos cuya evolución de precios es definida mediante un proceso estocástico continuo a la derecha  $S_t = (S_t^0, S_t^1)$ . Un portafolio  $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$  consiste en la cantidad de cada activo, en cierto instante de tiempo. Definimos una estrategia de comercio como aquel

## 2.1. Preámbulo

---

portafolio dinámico que surge al comprar y vender los activos en tiempos aleatorios denotados como  $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1} = T$ . Su valor, en cierto instante, es definido como el producto escalar entre el portafolio y el precio de los activos

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1.$$

Las estrategias de comercio realizadas por los agentes en los mercados financieros reales se basan que al momento de realizar alguna transacción en  $t = T_i$ , el portafolio de dicha estrategia todavía es descrito por el portafolio en tiempo anterior  $t = T_{i-1}$ , por lo cual el nuevo valor  $\phi_i$  cambia en un instante después de  $T_i$ , teniendo como consecuencia que las estrategias son continuas a la izquierda y por lo tanto predecibles.

Definimos el conjunto de procesos predecibles simples como todos los procesos estocásticos  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  que son representados de la siguiente manera

$$\phi_t = \phi_0 1_{t > 0} + \sum_{i=0}^{i=n} \phi_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

donde  $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1} = T$  son tiempos aleatorios  $\mathcal{F}_t$ -adaptados y cada  $\phi_i$  es una variable aleatoria acotada cuyo valor es conocido en  $T_i$ , es decir es  $\mathcal{F}_{T_i}$ -medible.

Es de destacar, que no todos los procesos estocásticos simples serán estrategias de comercio porque nos restringiremos a un subconjunto de él por propiedades adicionales que le exigiremos a dichas estrategias.

Al conocer que entre los tiempos  $T_i$  y  $T_{i+1}$  la cantidad de activo se mantiene constante (dado por el portafolio), la ganancia es solamente obtenida a causa del cambio de precios de los activos. Por lo cual, el capital obtenido en cierto instante  $t$ , de un portafolio inicial  $\phi_0$  es

$$G_t(\phi) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{i=j-1} \phi_i (S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \phi_j (S_t - S_{T_j}),$$

la cual es, matemáticamente, la integral estocástica del proceso predecible  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  con respecto al proceso  $(S_t)_{t \geq 0}$ . A su vez, conocemos que el valor del portafolio en tiempo  $t$  es dado mediante  $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$ .

## 2.2. Teoremas fundamentales

---

Definimos que una estrategia de comercio  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  es autofinanciante si  $V_t(\phi) = G_t(\phi)$ , o sea debe cumplir que el valor del portafolio es igual al capital obtenido mediante dicha estrategia. Esta propiedad nos asegura que todo evento de variación en el valor del portafolio es ocasionado solamente a través de la variación de los precios de los activos, por lo cual el capital ganado siempre es reinvertido en su totalidad en operaciones dentro del portafolio.

También definimos que una estrategia de comercio  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  es admisible si cumple que para todo  $t$  el valor de la misma nunca es negativo,  $(V_t(\phi) \geq 0)$ . Por último, le exigimos que no existan estrategias de comercio que generen oportunidad de arbitraje, las cuales se caracterizan por ser admisibles, autofinanciantes,  $V_0(\phi) = 0$  y  $P(V_T(\phi) > 0) \neq 0$ .

## 2.2. Teoremas fundamentales

Los modelos que utilizamos a lo largo del trabajo excluyen las estrategias que generen arbitraje pero necesitaremos utilizar importantes resultados que establecen equivalencias entre el concepto matemático de medidas equivalentes de martingala y los conceptos financieros de arbitraje y cobertura (hedging). Aunque los modelos utilizados por nosotros para el precio de los activos (exponenciales de Lévy) necesitan versiones más sofisticadas de estos teoremas de las que enunciaremos aquí, lo primordial es obtener la idea general que existen en ellos.

Los contratos financieros que poseen madurez en tiempo  $T$ , con sus correspondientes reclamos contingentes, son representados mediante su función de pago  $h$  (que es  $\mathcal{F}_T$ -medible) en cada posible evento, que puede depender del precio del activo solamente en el tiempo de madurez o puede depender de tiempos intermedios. El problema al que nos enfrentamos es el de atribuirle un valor a cada reclamo contingente.

En los mercados financieros reales, se intenta por parte del regulador del sistema que no exista oportunidad de arbitraje en ellos. Por lo tanto siempre debemos generar modelos matemáticos que no lo permitan y utilizamos como herramienta el Primer Teorema de Precios de Activos.

**Definición 1.** *Un mercado es viable si no existe oportunidad de arbitraje.*

### 2.3. Mercados Incompletos

---

**Teorema 1** (Primer Teorema). *El modelo de mercado definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  mediante el precio del activo  $(S_t)_{t \geq 0}$  es viable si y solo si existe una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  equivalente a  $\mathbb{P}$  tal que el precio de los activos descontados  $(\hat{S}_t)_{t \geq 0}$ , definido como  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$ , es una martingala con respecto a la medida  $\mathbb{Q}$ .*

*Demostración.* La demostración en el caso de modelos en tiempo discreto se encuentra [12]. En modelos de tiempo continuo se debe definir cuidadosamente el conjunto de estrategias admisibles, reclamos contingentes y la noción de medida de martingala. A su vez, para modelos exponenciales de Lévy se requiere el uso de  $\sigma$ -martingala.  $\square$

Otro concepto importante es el de una estrategia autofinanciante  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t^1)$  que se define como una cobertura perfecta de un reclamo contingente  $h$  si cumple la ecuación

$$h = V_0 + \int_0^T \phi_t^1 dS_t^0 + \int_0^T \phi_t^0 dS_t^0 \quad \text{P-casi seguramente.}$$

**Definición 2.** *Un mercado viable es completo si todo reclamo contingente  $h$  admite una cobertura perfecta.*

**Teorema 2** (Segundo Teorema). *El modelo de mercado definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  mediante el precio del activo  $(S_t)_{t \geq 0}$  es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  equivalente a  $\mathbb{P}$  tal que el precio de los activos descontados  $(\hat{S}_t)_{t \geq 0}$  es una martingala con respecto a la medida  $\mathbb{Q}$ .*

*Demostración.* La demostración en el caso de modelos en tiempo discreto se encuentra [12]. En modelos de tiempo continuo se debe definir cuidadosamente el conjunto de estrategias admisibles, reclamos contingentes y la noción de medida de martingala. A su vez, para modelos exponenciales de Lévy se requiere el uso de  $\sigma$ -martingala.  $\square$

Este teorema tiene como consecuencia que en un mercado completo existe una única manera de valuar los reclamos contingentes libre de arbitraje, que se define como el capital inicial necesario para realizar la cobertura perfecta.

### 2.3. Mercados Incompletos

EL problema al que nos enfrentamos en los mercados financieros reales a pesar de su continuo crecimiento y sofisticación es que ellos no son completos a causa de que la cobertura perfecta no existe, lo cual trae consigo

## 2.4. Regla de Precios

---

consecuencias para sus participantes. Los mercados incompletos son aquellos en los cuales no es posible transferir el riesgo completamente.

En los modelos de mercados completos se tiene una visión irreal del riesgo natural de emitir un reclamo contingente. Los agentes al valorar el precio del reclamo, ya sea utilizando un modelo de mercado completo o incompleto, conocen que en la realidad los mercados financieros son incompletos y que las operaciones posteriores no serán capaces de cubrir todos sus riesgos asociados. Por lo cual, resulta más eficiente utilizar modelos incompletos donde el riesgo de cubrirse pueda ser cuantificado mediante algún mecanismo y a posterior generar herramientas para minimizarlo.

Existen varias causas que provocan la incompletitud de los mercados financieros. Entre ellos se encuentran la poca comercialización de los activos financieros en relación a la clase de riesgos que se desea cubrir, variables a cuantificar que no se derivan del precio histórico del activo, la ignorancia frente al verdadero modelo estocástico que sigue el precio y costos de transacción de las operaciones. Sin embargo, la principal fuente de incompletitud en los mercados para nuestro trabajo son las discontinuidades que presentan los precios de los activos subyacentes.

Al trabajar siempre con mercados viables y de acuerdo a lo observado en la sección anterior, los modelos asociados a mercados incompletos poseen una gran cantidad de medidas de martingalas equivalentes, por lo cual existirán varias formas distintas de valorar los reclamos contingentes.

## 2.4. Regla de Precios

EL problema principal al que nos enfrentamos en matemática financiera es la valuación de los reclamos contingentes. Definimos regla de precios al procedimiento mediante el cual se le atribuye a cada reclamo contingente un valor  $\Pi_t(h)$  en cada instante de tiempo.

Existen algunos requisitos lógicos que deben verificar las reglas de precios. El primero es que el valor de todos los reclamos contingentes en tiempo  $t$  deben ser computados utilizando la información hasta ese instante, el segundo es que cualquier reclamo contingente de pago positivo debe tener siempre valor positivo y el tercero es que el valor del portafolio sea dado a

## 2.4. Regla de Precios

---

través de la suma de los valores de sus componentes.

Matemáticamente, estas restricciones se expresan:

1.  $\Pi_t(h)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t$ .
2. Sea  $h$  tal que  $\forall \omega \in \Omega$  se cumple  $h(\omega) \geq 0$  entonces  $\Pi_t(h) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .
- 3.

$$\Pi_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} h_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_t(h_j).$$

**Proposición 1.** *Una regla de precios  $\Pi$  que cumple las tres restricciones anteriores define una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  sobre el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ .*

*Demostración.* Dado  $A \in \mathcal{F}$  identificamos a  $1_A$  como la función de pago del reclamo contingente que otorga 1 en  $t = T$  si sucede el evento  $A$  o 0 en otro caso. En el caso que  $A = \Omega$  el reclamo contingente  $1_\Omega$  es el conocido bono cupón cero. Su valor es

$$\Pi_t(1_\Omega) = e^{-r(T-t)}$$

y es el valor presente de una unidad de dinero en tiempo  $T$  que lo denominaremos como el factor de descuento en el instante  $t$ .

Definimos  $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{\Pi_0(1_A)}{\Pi_0(1_\Omega)} = e^{rT} \Pi_0(1_A). \quad (2.1)$$

Mediante la restricción 2 de las reglas de precios se observa que  $1 \geq \mathbb{Q}(A) \geq 0$  y mediante su linealidad obtenemos  $\mathbb{Q}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_i)$  para eventos disjuntos por lo tanto  $\mathbb{Q}$  es una medida de probabilidad en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$ .  $\square$

Además, si exigimos que el conjunto de los reclamos contingentes cumplan con el teorema de convergencia dominada, recuperamos la regla de precios a través de la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  definida en (2.1).

Sean  $A_i$  eventos disjuntos y  $h$  la función de pago del portafolio formado de reclamos contingentes que otorgan 1 si suceden dichos eventos  $h = \sum c_i 1_{A_i}$ . Mediante la linealidad de  $\Pi$  obtenemos que se cumple

$$\Pi_0(h) = e^{-rT} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}(h).$$

## 2.4. Regla de Precios

---

Utilizando el teorema de convergencia dominada se obtiene el resultado para cualquier función de pago  $h$ .

Esta fórmula es llamada la regla de precios de riesgo neutral y asegura que el valor del reclamo contingente es dado por el valor de la esperanza descontada bajo la medida de riesgo neutral  $Q$ .

Esta medida no debe interpretarse como la probabilidad que el evento suceda en el mundo real sino como el valor que apostaría un inversor en él.

Análogamente a la definición de  $Q$  también podemos definir medidas de probabilidad en cada instante de tiempo  $t$  que asigne a cada  $A \in \mathcal{F}$  el valor  $Q_t(A) := e^{rt}\Pi_t(1_A)$ .

**Definición 3.** *La regla de precios es consistente con el tiempo si cumple que el valor en 0 de la función de pago  $h$  en tiempo  $T$  es la misma que el valor en 0 del pago  $\Pi_t(h)$  en tiempo  $t$ .*

Si requerimos que la regla de precio sea consistente con el tiempo entonces cada medida  $Q_t$  es obtenida solamente mediante restricción de la medida  $Q$  en la filtración  $\mathcal{F}_t$ . Por lo cual obtenemos que la regla de precios  $\Pi$  cumple

$$\Pi_t(h) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^Q(h|\mathcal{F}_t). \quad (2.2)$$

Con el propósito de situarnos bajo las hipótesis del Primer Teorema de Precios de Activos debemos exigirle también a la regla de precios que no genere oportunidad de arbitraje.

**Proposición 2.** *Si existe ausencia de arbitraje en los mercados entonces la medida histórica  $P$  es equivalente a la medida  $Q$ .*

*Demostración.* Sea una regla de precios dada a través de la fórmula (2.2), un evento  $A$  tal que  $P(A) = 0$  y su función de pago asociada  $1_A$ . Como a la vista de la medida histórica  $P$  el evento  $A$  es imposible este reclamo contingente no tiene valor. A su vez, bajo la regla de precio dada mediante la medida  $Q$  obtenemos  $\Pi_0(1_A) = e^{-rT}Q(A)$ . Entonces la regla de precios es coherente con la evolución histórica solamente si  $Q(A) = 0$ .

Si  $Q(A) = 0$  entonces  $\Pi_0(1_A) = 0$  y si  $P(A) \neq 0$  el comprador de este reclamo contingente está realizando una estrategia de arbitraje. Por lo cual, se debe cumplir que  $P(A) = 0$   $\square$

## 2.4. Regla de Precios

---

**Proposición 3.** *Si existe ausencia de arbitraje en los mercados entonces el valor descontado del precio del activo es una martingala con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$ .*

*Demostración.* Sea  $S_t$  el precio del activo en el instante  $t$ . Existen dos estrategias autofinanciantes que tienen la misma función de pago que son

- conservar el activo hasta el tiempo de madurez  $T$ ;
- vender el activo en el instante  $t$  a un precio  $S_t$  y depositarlo en cuenta a valor final de  $e^{r(T-t)}S_t$ .

Por lo tanto estas dos estrategias deben tener el mismo valor en cualquier instante de tiempo  $t$ , que es dado a través de la ecuación

$$\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}(S_T|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}(e^{r(T-t)}S_t|\mathcal{F}_t) = e^{r(T-t)}S_t.$$

Dividiendo sobre  $e^{rT}$  obtenemos

$$\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-rT}S_T|\mathcal{F}_t) = e^{-rt}S_t. \quad (2.3)$$

□

**Definición 4.** *Una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  es llamada medida de martingala equivalente a la medida de probabilidad histórica  $\mathbb{P}$  si cumple que  $\mathbb{Q}$  es equivalente a  $\mathbb{P}$  y la ecuación (2.3).*

**Teorema 3.** *Existe una correspondencia uno a uno entre las reglas de precios libre de arbitraje y las medidas de martingalas equivalentes.*

*Demostración.* ( $\rightarrow$ ) Aplicando la Proposición 2 y la Proposición 3 la demostración es inmediata.

( $\leftarrow$ ) Sea  $\phi$  una estrategia autofinanciante, sabemos que el proceso  $\hat{S}_t =: e^{-rt}S_t$  es una martingala bajo la medida  $\mathbb{Q}$ . Se cumple entonces que  $V_t(\phi) = V_0 + \int_0^t \phi d\hat{S}$  también es una martingala. Por lo tanto, la variable aleatoria  $\int_0^t \phi d\hat{S}$  toma tanto valores positivos como negativos generando que  $\mathbb{Q}(V_T(\phi) - V_0 = \int_0^T \phi d\hat{S} \geq 0) \neq 1$ . Como además  $\mathbb{Q}$  es equivalente a  $\mathbb{P}$  obtenemos  $\mathbb{P}(\int_0^T \phi d\hat{S} \geq 0) \neq 1$  implicando que  $\phi$  no es una estrategia de arbitraje.

□

## 2.4. Regla de Precios

---

Mediante el teorema anterior concluimos que definir un procedimiento libre de arbitraje que atribuye un valor a cada reclamo contingente es equivalente a especificar una medida de martingala equivalente. La existencia de alguna medida de estas características en el modelo nos permite ingresar en el mundo de los teoremas de precios de activos.

Las reglas de precios nos brindan una forma de evaluar los reclamos contingentes de una manera libre de arbitraje. Esta herramienta, aplicada a las opciones de compra europea, nos brinda el precio a pagar por el beneficiario de la opción en el instante  $t$ , que es dada por la ecuación (2.2), en dicho caso particular

$$C(t, S_t, T, K) = \Pi_t((S_T - K)^+) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t), \quad (2.4)$$

que en principio depende de cuatro parámetros.



# Procesos de Lévy

---

## 3.1. Introducción

Los procesos de Lévy, denominados en honor al matemático francés Paul Lévy (1886-1971), son procesos estocásticos de tiempo continuo que, de acuerdo a sus propiedades, se transforman en una herramienta importante para construir modelos aleatorios en muchas áreas de investigación incluyendo la matemática financiera. Su principal característica es que sus trayectorias pueden ser discontinuas pero en cada instante de tiempo  $t$ , la probabilidad de que exista un salto es cero, de esta forma se permiten modelar eventos imprevistos.

**Definición 5.** *Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  a valores en  $\mathbb{R}$  es un proceso de Lévy si cumple las siguientes propiedades*

- *Cadlag: Las trayectorias de  $(X_t)_{t \geq 0}$  son P-casi seguramente continuas a derecha con límite a la izquierda.*
- $P(X_0 = 0) = 1$ .
- *Incrementos Estacionarios: Para  $0 \leq s \leq t$  se cumple que*

$$X_t - X_s \stackrel{(d)}{=} X_{t-s}.$$

- *Incrementos Independientes: Para todas las posibles elecciones  $t_i$  con  $t_1 < \dots < t_n$  se cumple que las variables aleatorias*

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

*son independientes.*

- *Continuidad Estocástica:  $\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} P[|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon] = 0$ .*

### 3.1. Introducción

---

Desde la definición anterior, es difícil observar cuan amplia es la gama de los procesos de Lévy, pero mediante la siguiente relación entre los procesos y las distribuciones infinitamente divisibles se obtiene una caracterización de lo variada que es esta clase.

**Definición 6.** Una distribución de probabilidad  $F$  en  $\mathbb{R}$  es llamada infinitamente divisible si para cualquier entero  $n > 1$  existen variables aleatorias  $\xi_1, \dots, \xi_n$  independientes igualmente distribuidas tales que  $\xi_1 + \dots + \xi_n$  tiene distribución  $F$ .

**Proposición 4.** Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy. Entonces  $\forall t$ ,  $X_t$  tiene distribución infinitamente divisible y recíprocamente si  $F$  es una distribución infinitamente divisible existe un  $(Y_t)_{t \geq 0}$  proceso de Lévy tal que  $Y_1$  tiene distribución  $F$ .

*Demostración.* ( $\rightarrow$ ) Para todo  $t \geq 0$  y  $n > 0$  definimos  $\Delta := t/n$ . Sea  $X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}$  que son variables aleatorias independientes cuya distribución es la misma que  $X_\Delta$ , obteniendo que  $X_t$  tiene distribución infinitamente divisible.

( $\leftarrow$ ) La demostración se encuentra en [24], corolario 11.6. □

La función característica de los procesos de Lévy cumple ciertas propiedades que son de suma importancia para la obtención de nuevos resultados sobre estos procesos.

**Proposición 5.** Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$  entonces existe una función continua  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  llamada exponente característico que cumple

$$\mathbf{E}(e^{izX_t}) = e^{t\psi(z)} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Sea  $t > s$  y  $z \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \phi_{s+t}(z) &= \mathbf{E}(e^{izX_{t+s}}) = \mathbf{E}(e^{iz[X_s + (X_{t+s} - X_s)]}) = \mathbf{E}(e^{izX_s} e^{iz(X_{t+s} - X_s)}) \\ &= \mathbf{E}(e^{izX_s}) \mathbf{E}(e^{iz[X_{t+s} - X_s]}) = \mathbf{E}(e^{izX_s}) \mathbf{E}(e^{izX_t}) = \phi_s(z) \phi_t(z). \end{aligned}$$

La continuidad estocástica de los procesos de Lévy implica que

$X_s \xrightarrow{(d)} X_t$  y utilizando el resultado que afirma que una sucesión de variables aleatorias converge en distribución a otra si y solo si  $\forall z \in \mathbb{R}$  sus funciones características convergen puntualmente, obtenemos que  $\phi_s(z) \rightarrow \phi_t(z)$  cuando  $s \rightarrow t$ . Por lo tanto, concluimos que la función  $t \mapsto \phi_t(z)$  es continua.

### 3.2. Ejemplos de Procesos de Lévy

---

La propiedad multiplicativa junto a la continuidad de la función  $t \mapsto \phi_t(z)$  implican que la función característica es exponencial, es decir

$$\mathbf{E}(e^{izX_t}) = e^{\theta(z)t}.$$

□

De esta proposición concluimos que la ley de  $X_t$  está únicamente determinada por el conocimiento de la ley en algún instante de tiempo, transformándose en el único grado de libertad al especificar un proceso de Lévy.

Para culminar esta sección enunciaremos el teorema de Lévy-Khintchine, que perfecciona el resultado anterior, al otorgarnos la forma de caracterizar a cada proceso de Lévy de forma única. La demostración del teorema es complicada pero revela muchos asuntos vinculados a la estructura general de los procesos. Ella se encuentra en varios libros, incluido [24].

**Teorema 4** (Lévy-Khintchine). *Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy. Entonces existen únicos  $\sigma \geq 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $\nu$  una medida de Radon concentrada en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  que cumple  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ , tales que  $\forall z \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}(e^{izX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde se define  $\psi(z)$  como

$$\psi(z) = i\gamma z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x|<1}) \nu(dx).$$

El vector  $(\gamma, \sigma, \nu(dx))$  es llamado la tripleta característica de proceso de Lévy  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

### 3.2. Ejemplos de Procesos de Lévy

EN esta sección incluiremos algunos ejemplos de procesos de Lévy que serán de gran utilidad en el transcurso del trabajo. Sin embargo, existen otra gran cantidad de procesos que requieren conocimientos no triviales de funciones especiales para el estudio de sus propiedades.

#### Movimiento browniano con drift

El proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido como  $X_t := \gamma t + \sigma W_t$  es un movimiento browniano con drift donde  $(W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano.

### 3.2. Ejemplos de Procesos de Lévy

---

La ley de probabilidad de  $X_1$  es la distribución gaussiana de esperanza  $\gamma$  y varianza  $\sigma^2$ . Por lo cual, se cumple que

$$\mathbf{E}(e^{izX_t}) = e^{t(-i\gamma z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2)}.$$

#### Procesos de Poisson

Es de recordar que una variable aleatoria entera  $N$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  si para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica

$$\mathbf{P}(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

El proceso estocástico  $(N_t)_{t \geq 0}$  definido como  $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$  es un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$  donde  $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$  siendo  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  una sucesión de variables aleatorias exponenciales de parámetro  $\lambda$ . La función característica del proceso  $N_t$  es  $\mathbf{E}(e^{izN_t}) = e^{\lambda t(e^{iz} - 1)}$ .

#### Procesos de Poisson compuestos

El proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido como  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$  donde  $\xi_i$  son variables aleatorias independientes igualmente distribuidas de distribución  $f$  y  $(N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$  independiente de  $\xi_i$  es un proceso de Poisson compuesto de intensidad  $\lambda$  y distribución de saltos dado por  $f$ .

La función característica de estos procesos es, designando  $\hat{f}$  la función característica de  $f$  y condicionando en  $N_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{izX_t}) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{izX_t}) | N_t) = \mathbf{E}((\hat{f}(z))^{N_t}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n (\hat{f}(z))^n}{n!} = e^{\lambda t(\hat{f}(z) - 1)} = \exp\left(t\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1) f(dx)\right). \end{aligned}$$

#### Procesos Gamma

La distribución  $(\alpha, \beta)$ -Gamma es aquella que está definida mediante la medida de probabilidad concentrada en  $(0, \infty)$ , dada por

$$f_{\alpha, \beta}(dx) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} dx.$$

Haciendo cuentas, obtenemos que su función característica es

$$\int_0^\infty e^{izx} f_{\alpha, \beta}(dx) = \frac{1}{(1 - \frac{iz}{\alpha})^\beta}. \quad (3.1)$$

### 3.3. Medida de saltos

---

Se definen los procesos Gamma como aquella clase de procesos de Lévy cuyo exponente característico es el lado derecho de la fórmula (3.1).

#### Procesos Estables

Una variable aleatoria  $\xi$  tiene distribución estable si para todo  $n \geq 1$  existen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  variables aleatorias independientes de igual distribución que  $\xi$ ,  $\alpha \in (0, 2]$  y  $b_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$\xi_1 + \dots + \xi_n \stackrel{(d)}{=} n^{1/\alpha} \xi + b_n.$$

Los procesos estables se definen como aquellos procesos de Lévy que tienen de exponente característico el correspondiente a una distribución estable. En próximos capítulos continuaremos el desarrollo de estos procesos.

### 3.3. Medida de saltos

Esta sección la incluimos con el objetivo de entender algunas herramientas matemáticas que nos permiten describir la estructura contenida en los procesos de Lévy.

**Definición 7.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $E \subset \mathbb{R}^d$  y  $\mu$  una medida de Radon en  $(E, \epsilon)$ . Una medida aleatoria de Poisson en  $E$  de intensidad  $\mu$  es una medida aleatoria  $M : \Omega \times \epsilon \rightarrow \mathbb{N}$  tal que

- para casi todo  $\omega \in \Omega$ ,  $M(\omega, \cdot)$  es una medida de Radon en  $(E, \epsilon)$ ;
- para cada conjunto medible  $A \subset E$ ,  $M(\cdot, A) = M(A)$  es una variable aleatoria de Poisson con parámetro  $\mu(A)$ ;
- para conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  medibles y disjuntos, las variables  $M(A_1), \dots, M(A_n)$  son independientes.

Estas medidas tienen la característica de que existen para cualquier medida de Radon  $\mu$  en  $E \in \mathbb{R}$ . Analizando su construcción, obtenemos que se puede representar como una medida de conteo asociada a una sucesión de puntos aleatorios  $\{X_n(\omega), n \geq 1\}$

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_n}.$$

A su vez, podemos definir la medida aleatoria de Poisson compensada como  $\widetilde{M} := M(A) - \mu(A)$  que cumple  $\mathbf{E}(\widetilde{M}(A_i)) = 0$  y  $Var(\widetilde{M}(A_i)) = \mu(A_i)$

### 3.3. Medida de saltos

---

para todo  $1 \leq i \leq n$ .

El caso particular de estas medidas que nos interesa es cuando  $E = [0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por lo cual el conjunto de puntos  $\{X_n(\omega), n \geq 1\}$  se transforma en  $\{(T_n(\omega), Y_n(\omega)), n \geq 1\}$  donde, de acuerdo a su interpretación,  $T_n$  debe cumplir que es adaptado y  $Y_n$  debe ser  $\mathcal{F}_{T_n}$ -medible. Con el objetivo de darle nombre a este tipo de sucesiones de puntos enunciamos la próxima definición.

**Definición 8.** *El proceso denominado puntos con marcas en  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  es una sucesión  $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$  donde*

- $(T_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión creciente de tiempos aleatorios adaptados que cumple  $T_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- $(Y_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de variables aleatorias en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- $Y_n$  es  $\mathcal{F}_{T_n}$ -medible.

De forma general, podemos construir medidas aleatorias evaluadas en enteros utilizando los procesos puntos con marcas de la siguiente manera

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, Y_n)}.$$

Para cada  $\omega$ ,  $M(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))}$  es una medida en  $[0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y se pueden definir integrales de funciones  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifican

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(t, y)| \mu(dt dy) < \infty$$

con respecto a esta medida. Vale destacar, que la construcción de la integral se hace de manera análoga a otras medidas de Radon.

Por lo cual, la variable aleatoria finita

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(t, y)| M(dt dy) = \sum_{n \geq 1} f(T_n, Y_n),$$

nos permite obtener un proceso de saltos  $X_t(f)$  adaptado, de trayectorias cadlag cuyas discontinuidades ocurren en  $(T_n)_{n \geq 1}$  y sus amplitudes son dadas mediante  $f(T_n, Y_n)$  de la siguiente manera

$$X_t(f) = \int_{[0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(s, y)| M(ds dy) = \sum_{n, T_n \in [0, T]} f(T_n, Y_n).$$

### 3.4. La descomposición de Lévy-Itô

---

En el caso particular de los procesos de Lévy, utilizando las herramientas anteriores, podemos definir una medida aleatoria  $J_X$  en  $[0, T] \times \mathbb{R}$  llamada medida de saltos. Como  $(X_t)_{t \geq 0}$  presenta trayectorias cadlag, el conjunto  $\{t \in [0, T], \Delta X_t := X_t - X_{t-} \neq 0\}$  es numerable, por lo cual definimos a  $(T_n)_{n \geq 1}$  como la sucesión de saltos aleatorios del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  y a  $(Y_n)_{n \geq 1}$  como  $Y_n := X_{T_n} - X_{T_n-}$  siendo el tamaño de cada salto. Obtenemos que  $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$  define un proceso puntos con marcas en  $[0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  que contiene toda la información de los saltos del proceso y como observamos anteriormente, definimos la medida de saltos  $J_X$  como

$$J_X(\omega, \cdot) := \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \delta_{(t, \Delta X_t)}.$$

Esta medida aleatoria contiene toda la información sobre las discontinuidades del proceso  $X$ , brindando cuando suceden los saltos y cuan grande son. Intuitivamente, para cualquier subconjunto  $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $J_X([0, t] \times A)$  es el número de saltos de  $X$  ocurridos entre 0 y  $t$  cuya amplitud pertenece a  $A$ .

### 3.4. La descomposición de Lévy-Itô

La descomposición de Lévy-Itô fue originalmente encontrada por Itô en 1945 y completada su demostración por Lévy en 1952. Este resultado es muy importante dado su implicancia tanto en la teoría general de los procesos como en la práctica. En él, se asegura que todo proceso de Lévy es una suma de un movimiento browniano con drift y una posible suma infinita de procesos de Poisson compuestos independientes, resultando que los procesos son aproximados con precisión arbitraria mediante procesos jump-diffusion (suma de movimiento browniano y proceso de Poisson compuesto).

Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy, mediante el teorema de Lévy-Khintchine obtenemos que existe su tripleta característica  $(\gamma, \sigma, \nu(dx))$  tal que su exponente característico es, reorganizando términos, para todo  $z$

### 3.4. La descomposición de Lévy-Itô

---

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \left( i\gamma z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \right) + \\ & \left( \nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) \int_{|x| \geq 1} (e^{izx} - 1) \frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))} \right) + \\ & \left( \int_{0 < |x| < 1} (e^{izx} - 1 - izx) \nu(dx) \right) := \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}. \end{aligned}$$

La idea general de la descomposición es demostrar que  $\psi^{(1)}$ ,  $\psi^{(2)}$  y  $\psi^{(3)}$  corresponden a exponentes característicos de tres clases diferentes de procesos de Lévy.

En la sección 3.2, demostramos que  $\psi^{(1)}$  es el exponente característico del movimiento browniano con drift  $X_t^{(1)} = -\gamma t + \sigma W_t$ . A su vez, dado que la condición  $\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$  implica que el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  tiene un número finito de saltos de valor absoluto más grande que 1, obtenemos que  $\psi^{(2)}$  es el exponente característico del proceso de Poisson compuesto  $X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ , donde  $(N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de intensidad  $\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$  y  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  son variables aleatorias independientes de distribución  $\frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))}$ , concentrada en  $\{x : |x| \geq 1\}$ . Vale destacar, que si  $\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) = 0$  el segundo proceso es idénticamente igual a cero.

La parte más difícil de la descomposición, donde se ayuda de las medidas de salto, es demostrar que existe un proceso  $X_t^{(3)}$  cuyo exponente característico es  $\psi^{(3)}$ . Como consecuencia de que la medida  $\nu(dx)$  puede presentar una irregularidad en cero (tener medida infinita en algún entorno del origen), se incluye el caso de que existan una cantidad de pequeños saltos infinitos y cuyas sumas no necesariamente converjan.

Observando que se cumple

$$\begin{aligned} & \int_{0 < |x| < 1} (e^{izx} - 1 - izx) \nu(dx) = \\ & \sum_{n \geq 0} \left\{ \lambda_n \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| \leq 2^{-n}} (e^{izx} - 1) \nu_n(dx) - iz \lambda_n \left( \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| \leq 2^{-n}} x \nu_n(dx) \right) \right\}, \end{aligned}$$

### 3.5. Medidas equivalentes

---

donde  $\lambda_n = \nu(\{x : 2^{-(n+1)} \leq |x| \leq 2^{-n}\})$  y  $\nu_n(dx) = \frac{\nu(dx)}{\lambda_n}$  nos sugiere que el proceso  $X^{(3)}$  consiste en la suma de una cantidad numerable de procesos de Poisson de diferentes intensidades y compensados por drifts lineales.

**Teorema 5** (Lévy-Itô). *Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy,  $J_X$  su medida de saltos y  $\tilde{J}_X$  su medida compensada correspondiente. Entonces*

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + X_t^1 + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon, \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} X_t^1 &= \int_{|x| \geq 1, s \in [0, T]} x J_X(ds \times dx); \\ \tilde{X}_t^\epsilon &= \int_{\epsilon < |x| < 1, s \in [0, T]} x (J_X(ds \times dx) - \nu(dx) ds); \\ &= \int_{\epsilon < |x| < 1, s \in [0, T]} x \tilde{J}_X(ds \times dx). \end{aligned}$$

Todos los procesos son independientes y la convergencia en el último sumando de (3.2) es uniforme en  $t$  sobre  $[0, T]$  y casi seguramente.

### 3.5. Medidas equivalentes

EN el capítulo anterior observamos el cometido que tienen los cambios de medidas equivalentes al definir reglas de precios libres de arbitraje. En esta sección enunciaremos, sin demostración, el resultado general de medidas equivalentes para procesos de Lévy y obtendremos conclusiones sobre modelos utilizados en el transcurso del trabajo.

**Teorema 6.** *Sean  $(X_t, P)$  y  $(X_t, Q)$  dos procesos de Lévy en  $\mathbb{R}$  con tripletas características  $(\gamma_P, \sigma_P, \nu_P(dx))$  y  $(\gamma_Q, \sigma_Q, \nu_Q(dx))$ . Se cumple que las medidas  $P|_{\mathcal{F}_t}$  y  $Q|_{\mathcal{F}_t}$  son equivalentes para todo  $t$  si y solo si se satisfacen las tres condiciones*

1.  $\sigma_P = \sigma_Q$ ;
2. las medidas de Lévy son equivalentes y cumplen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\phi(x)/2} - 1)^2 \nu_P(dx) < \infty,$$

donde  $\phi(x) = \log\left(\frac{d\nu_Q}{d\nu_P}\right)$ ;

### 3.5. Medidas equivalentes

---

3. si  $\sigma_P = 0$ , se debe cumplir además

$$\gamma_Q - \gamma_P = \int_{-1}^1 x(\nu_Q - \nu_P)(dx).$$

Si se cumplen las condiciones anteriores, obtenemos además que la derivada de Radon-Nikodym es

$$\frac{d(Q|\mathcal{F}_t)}{d(P|\mathcal{F}_t)} = e^{U_t},$$

donde

$$U_t = \eta X_t^c - \frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2} - \eta \gamma_P t + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \sum_{s \leq t, |\Delta X_s| > \epsilon} \phi(\Delta X_s) - t \int_{|x| > \epsilon} (e^{\phi(x)} - 1) \nu_P(dx) \right),$$

donde  $X_t^c$  es la parte continua del proceso  $X_t$  y  $\eta$  es tal que se cumple

$$\gamma_Q - \gamma_P - \int_{-1}^1 x(\nu_Q - \nu_P)(dx) = \sigma^2 \eta$$

si  $\sigma > 0$ .

Una gran cantidad de consecuencias obtenemos del teorema anterior al aplicarlo a procesos de Lévy de características particulares. Así es el caso del movimiento browniano con drift, en el que accedemos a las medidas equivalentes solamente modificando el drift porque al variar la volatilidad se genera un proceso de características distintas. En el caso del proceso de Poisson, cambiar la intensidad de los saltos no nos genera nuevas trayectorias como si es el caso de variar el tamaño de saltos.

En los anteriores casos ya hemos obtenido infinitas medidas equivalentes pero aún no hemos observado procesos en los que se pueda modificar la medida de Lévy  $\nu(dx)$ . Los procesos estables temperados (que veremos en el próximo capítulo) son tales que se puede modificar la distribución de los saltos de gran tamaño para obtener medidas equivalentes. Esta característica es deseable para la matemática financiera porque los grandes saltos afectan las colas de la distribución de los retornos e influyen en los precios de las opciones.

# Estimación y calibración

---

## 4.1. Semi-martingalas

EN el capítulo anterior desarrollamos los procesos de Lévy como una herramienta adecuada para modelar trayectorias aleatorias que presentan discontinuidades. Sin embargo, estos procesos presentan la desventaja de no ser estables bajo integración estocástica ni bajo transformaciones no lineales. Para solucionar este inconveniente debemos considerar una clase más grande de procesos estocásticos que contengan los procesos de Lévy y a su vez sean estables bajo las operaciones anteriores.

Intuitivamente, al modelo seleccionado de evolución de precios se le debe exigir una propiedad de estabilidad que se basa en que si ocurren pequeños cambios en la composición de la estrategia de comercio se refleje solamente en pequeños cambios en el valor del portafolio.

**Definición 9.** *Un proceso  $(S_t)_{t \geq 0}$  cadlag, adaptado a  $\mathcal{F}_t$  es una semi-martingala si para todo  $\phi$  y  $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$  procesos predecibles simples que verifican*

$$\sup_{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)| \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

*se cumple que sus integrales estocásticas respecto a  $S$  satisfacen*

$$\int_0^T \phi_t^n dS_t \xrightarrow{P} \int_0^T \phi_t dS_t. \quad (4.2)$$

Esta definición involucra la convergencia uniforme en  $[0, T] \times \Omega$  y la convergencia en probabilidad de la variable aleatoria  $\int_0^T \phi_t^n dS_t$ . La próxima proposición nos permitirá observar que dos procesos son semi-martingalas, procesos importantes para el desarrollo de nuestro trabajo.

#### 4.1. Semi-martingalas

---

**Proposición 6.** *Los procesos estocásticos de variación finita y las martingalas de cuadrado integrables son semi-martingalas.*

*Demostración.* Sea  $(S_t)_{t \geq 0}$  un proceso de variación acotada y su variación total en  $[0, T]$  la denominamos  $bv(S) < \infty$ . Se cumple

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \phi_u dS_u \leq bv(S) \sup_{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)|,$$

por lo tanto, observando la definición, obtenemos que es una semi-martingala.

Sea  $(M_t)_{t \geq 0}$  una martingala de cuadrado integrable. Aplicando la desigualdad de Doob, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \left( \int_0^t \phi_u dM_u \right)^2 \right) &= \mathbf{E} \left( \left( \phi_0 M_0 + \sum_{i=0}^n \phi_i (M_{T_{i+1} \wedge t} - M_{T_i \wedge t}) \right)^2 \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \phi_0^2 M_0^2 + \sum_{i=0}^n \phi_i^2 (M_{T_{i+1} \wedge t} - M_{T_i \wedge t})^2 \right) \\ &\leq \sup_{s, \omega} |\phi_s^2(\omega)| \mathbf{E} \left( M_0^2 + \sum_{i=0}^n (M_{T_{i+1} \wedge t} - M_{T_i \wedge t})^2 \right) \\ &\leq \sup_{s, \omega} |\phi_s^2(\omega)| \mathbf{E} \left( M_0^2 + \sum_{i=0}^n (M_{T_{i+1} \wedge t}^2 - M_{T_i \wedge t}^2) \right) \\ &\leq \sup_{s, \omega} |\phi_s^2(\omega)| \sup_s \mathbf{E} (M_s^2), \end{aligned}$$

implicando, que cuando la estrategia converge uniformemente la integral estocástica converge en  $L^2$  uniformemente en  $t$  y por lo tanto en probabilidad.  $\square$

Observamos de la definición de estos procesos que una combinación lineal finita de semi-martingalas también lo es. Por lo cual, la proposición anterior junto a la descomposición de Lévy-Itô nos permite concluir que todos los procesos de Lévy son semi-martingalas.

**Proposición 7.** *Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  una semi-martingala y  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  un proceso predecible con respecto a  $X_t$ . Si definimos el proceso  $(S_t)_{t \geq 0}$  como  $S_t := \int_0^t \sigma_u dX_u$  se cumple que es una semi-martingala.*

*Demostración.* Sea  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  un proceso predecible y  $\{\phi_t^n\}_{t \geq 0}$  una sucesión que cumple (4.1). Sabemos que el proceso  $\{\phi_t \sigma_t\}_{t \geq 0}$  es predecible respecto

## 4.1. Semi-martingalas

---

a  $X_t$  y que cumple

$$\sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t^n \sigma_t(\omega) - \phi_t \sigma_t(\omega)| \rightarrow 0,$$

por lo cual, junto con la propiedad asociativa obtenemos

$$\int_0^T \phi_t^n dS_t = \int_0^T \phi_t^n \sigma_t dX_t \rightarrow \int_0^T \phi_t \sigma_t dX_t = \int_0^T \phi_t dS_t.$$

□

Esta proposición nos permite observar que la clase de semi-martingalas es estable frente a la integración estocástica y también nos permitirá obtener que los procesos estocásticos dirigidos por procesos de Lévy  $X_t$  de la forma  $Y_t = f(t, X_t)$  continúan siendo semi-martingalas. Este resultado es una consecuencia del Lema de Itô para el caso de semi-martingalas.

**Lema 1.** *Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  una semi-martingala y  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^{1,2}$ . Se cumple*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_{s-}) dX_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_{s-}) d[X, X]_s^c \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} \left( f(s, X_s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_{s-}) \right), \end{aligned}$$

donde  $[X, X]_t := |X_t| - 2 \int_0^t X_{s-} dX_s$  es el proceso variación cuadrática (que cumple que es creciente) y  $[X, X]_t^c$  es su parte continua.

Nos interesa el caso particular cuando  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy.

**Lema 2.** *Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy con tripleta característica  $(\gamma, \sigma, \nu(dx))$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$  tal que sus dos primeras derivadas son acotadas. Entonces el proceso estocástico  $Y_t =: f(X_t) = M_t + V_t$  donde  $M_t$  es una martingala dada por la ecuación*

$$M_t = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \sigma dW_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} \left( f(X_{s-} + y) - f(X_{s-}) \right) \tilde{J}_X(dsdy)$$

y  $V_t$  es un proceso continuo de variación acotada dado por la ecuación

$$\begin{aligned} V_t &= \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s) ds - \int_0^t \gamma f'(X_s) ds + \\ &\int_{[0,t] \times \mathbb{R}} \left( f(X_{s-} + y) - f(X_{s-}) - y f'(X_{s-}) 1_{|y| \leq 1} \right) ds \nu(dy). \end{aligned}$$

## 4.2. Modelos exponenciales de Lévy

---

Este lema es de gran importancia para nosotros, dado que obtuvimos en los capítulos anteriores que la noción de martingala de procesos exponenciales de Lévy es relevante para los mercados incompletos.

## 4.2. Modelos exponenciales de Lévy

EN esta sección consideramos procesos estocásticos  $(X_t)_{t \geq 0}$  tales que cumplen

$$\int_{|y| \geq 1} e^y \nu(dy) < \infty, \quad (4.3)$$

lo que es equivalente a exigir que se cumpla  $\mathbf{E}(\exp(X_t)) < \infty$ .

Aplicando el último lema de la sección anterior obtenemos que el procesos  $(\exp(X_t))_{t \geq 0}$  se puede dividir en la suma de una martingala y un drift donde

$$M_t = 1 + \int_0^t \exp(X_{s-}) \sigma dW_s + \int_{[0,t) \times \mathbb{R}} \exp(X_{s-}) (\exp(z) - 1) \tilde{J}_X(ds dz); \quad (4.4)$$

$$V_t = \int_0^t \exp(X_{s-}) \left( \gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(z) - 1 - z 1_{|z| \leq 1}) \nu(dz) \right) ds. \quad (4.5)$$

Por lo tanto, podemos concluir que el proceso  $(\exp(X_t))_{t \geq 0}$  es martingala si y solo si se cumple la siguiente ecuación

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(z) - 1 - z 1_{|z| \leq 1}) \nu(dz) = 0. \quad (4.6)$$

Los modelos exponenciales de Lévy de riesgo neutral son obtenidos al exponenciar un proceso de Lévy como en la ecuación (1.1) e imponer las ecuaciones (4.3), (4.6) en su tripleta  $(\gamma, \sigma, \nu(dx))$  con el fin de garantizar que el proceso  $(e^{-rt} S_t)_{t \geq 0}$  sea una martingala.

En la próxima proposición, demostramos una buena propiedad que cumplen estos modelos en la valuación de opciones de compra europeas.

**Proposición 8.** *En los modelos exponenciales de Lévy, el precio de la opción dado por la ecuación (2.4) es representado por sólo dos variables.*

### 4.3. Estimación por Máxima Verosimilitud

---

*Demostración.* A causa de que los incrementos son independientes y estacionarios en los procesos de Lévy y definiendo  $\tau := T - t$  se cumple

$$\begin{aligned} C(t, S_t, T, K) &= e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((S_T - K)^+ | S_t = S) \\ e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((S e^{r\tau + X_\tau} - K)^+) &= K e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((e^{x + X_\tau} - 1)^+), \end{aligned}$$

donde  $x = \log(S/K) + r\tau$ .

Si definimos el precio de la opción forward como

$$u(\tau, x) = \frac{e^{r\tau} C(t, S_t, K, T)}{K},$$

obtenemos que es reparametrizado por las dos variables  $\tau$  y  $x$  de la forma

$$u(\tau, x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((e^{x + X_\tau} - 1)^+).$$

□

Esta clase de modelos nos brindan una gran cantidad de procesos positivos que presentan discontinuidades y como consecuencia del teorema de Lévy-Khintchine la función característica es conocida y nos permite utilizar métodos de valuación basados en la transformada de Fourier. Además, la elección de la medida de Lévy nos permite calibrar los modelos mediante precios de opciones del mercado.

### 4.3. Estimación por Máxima Verosimilitud

EN esta sección desarrollaremos las ideas básicas del método de máxima verosimilitud, procedimiento que utilizaremos para estimar los parámetros de la medida de probabilidad histórica  $P$ .

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  observaciones independientes extraídas de una función de distribución desconocida con función de densidad  $f_0(\cdot)$ . Conocemos, que  $f_0$  pertenece a un modelo paramétrico conformado por una familia de distribuciones  $\{f(\cdot|\theta)\}$ , de manera que  $f_0$  corresponde a  $\theta = \theta_0$ .

Se define la función de verosimilitud

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta),$$

#### 4.4. La transformada de Esscher

---

pero en la práctica se utiliza con gran frecuencia, el logaritmo de la función de verosimilitud

$$l(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \log L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta).$$

El estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  estima  $\theta_0$  maximizando la función  $l(\theta|x_1, \dots, x_n)$

$$\hat{\theta} = \arg \max l(\theta|x_1, \dots, x_n).$$

#### 4.4. La transformada de Esscher

LA transformada de Esscher es una técnica que se aplica con el fin de valorar opciones, al determinar una medida de probabilidad equivalente  $Q_{\theta^*}$  a la medida de probabilidad histórica  $P$  estimada mediante algún mecanismo.

En la mayoría de los procesos utilizados en este trabajo conocemos que las medidas de martingalas equivalentes no son únicas, por lo tanto el mérito que tiene la transformada de Esscher es generar una medida de riesgo neutral particular aplicable a todos los procesos de manera similar.

Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy bajo la medida  $P$ . El procedimiento propone una familia de medidas equivalentes  $(Q_\theta)_{\theta \in \Theta}$  mediante la derivada de Radon-Nikodym dada por la ecuación

$$\frac{d(Q_\theta|\mathcal{F}_t)}{d(P|\mathcal{F}_t)} = \frac{e^{\theta X_t}}{\mathbf{E}e^{\theta X_t}} = e^{\theta X_t - \gamma(\theta)t}, \quad (4.7)$$

donde se define  $\gamma(\theta) = \log(\mathbf{E}e^{\theta X_1})$ .

El parámetro  $\theta^*$  es tal que el precio descontado es una martingala bajo la nueva medida de probabilidad  $Q_{\theta^*}$ .

**Lema 3.** Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy y  $h > 0$ . Para todo  $t$  y  $h$  se cumple

$$\mathbf{E}(e^{X_t}) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{E}(e^{X_{t+h}}|\mathcal{F}_t) = e^{X_t}.$$

*Demostración.* ( $\rightarrow$ )

$$\mathbf{E}(e^{X_{t+h}}|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(e^{X_{t+h}-X_t}e^{X_t-X_0}|\mathcal{F}_t) =$$

#### 4.5. La transformada de Fourier

---

$$\mathbf{E}(e^{X_{t+h}-X_t}|\mathcal{F}_t)\mathbf{E}(e^{X_t}|\mathcal{F}_t) = e^{X_t}\mathbf{E}(e^{X_h-X_0}|\mathcal{F}_t) = e^{X_t}.$$

(←)

$$\mathbf{E}(e^{X_{t+h}}|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(e^{X_{t+h}-X_t}|\mathcal{F}_t)\mathbf{E}(e^{X_t}|\mathcal{F}_t) = e^{X_t},$$

por lo tanto obtenemos que

$$\mathbf{E}(e^{X_{t+h}-X_t}|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(e^{X_h}) = 1.$$

□

**Proposición 9.** *El parámetro encontrado a través de la transformada de Esscher  $\theta^*$  cumple*

$$\gamma(\theta^* + 1) - \gamma(\theta^*) = 0. \quad (4.8)$$

*Demostración.* La medida  $\mathbb{Q}_{\theta^*}$  debe ser equivalente a la medida histórica  $\mathbb{P}$  y lo cumple dada su definición mediante la derivada de Radon-Nikodym. Además, debe cumplir que el proceso  $e^{-rt}S_t$  es una  $\mathbb{Q}_{\theta^*}$ -martingala. Mediante el lema previo, el parámetro  $\theta^*$  debe cumplir la ecuación

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}_{\theta^*}} e^{X_t} = 1. \quad (4.9)$$

Sabemos que para cualquier medida  $\mathbb{Q}_{\theta}$  dada por la ecuación (4.7), se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}_{\theta}} e^{X_t} &= \int_{\Omega} e^{X_t} d\mathbb{Q}_{\theta} = \int_{\Omega} e^{X_t} e^{\theta X_t - \gamma(\theta)t} d\mathbb{P} = \\ \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(e^{(\theta+1)X_t} e^{-\gamma(\theta)t}) &= e^{-\gamma(\theta)t} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(e^{(\theta+1)X_t}) = e^{\gamma(\theta+1)t - \gamma(\theta)t}. \end{aligned}$$

Por lo cual, de la ecuación (4.9), el parámetro  $\theta^*$  es aquel que satisface

$$e^{\gamma(\theta^*+1)t - \gamma(\theta^*)t} = 1,$$

obteniendo

$$\gamma(\theta^* + 1) - \gamma(\theta^*) = 0.$$

□

#### 4.5. La transformada de Fourier

Como consecuencia del no conocimiento de la fórmula de la densidad de la mayoría de los procesos de Lévy, los modelos financieros basados en exponenciales de Lévy no presentan fórmulas cerradas para los precios de opciones. Sin embargo, el teorema de Lévy-Khintchine nos permite utilizar

## 4.5. La transformada de Fourier

---

técnicas basadas en la transformada de Fourier para calcularlos.

Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la transformada de Fourier es definida como

$$\mathbf{F}f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} f(x) dx$$

y la inversa de la transformada de Fourier es computada como

$$\mathbf{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} f(v) dv.$$

En el desarrollo de estos procedimientos, necesitaremos calcular la transformada de Fourier y su inversa de manera eficiente. Estos cálculos los realizaremos utilizando la transformada de Fourier discreta para aproximar,

$$F_n = \sum_{j=0}^{j=N-1} f(x_j) e^{-2\pi i n j / N} \quad n = 0, \dots, N-1;$$

mediante el procedimiento conocido como Fast Fourier Transform (FFT).

La FFT es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta y su inversa y es de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones incluido el la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. Se considera uno de los algoritmos aritméticos más ampliamente utilizados siendo un medio eficaz de ejecutar un cálculo matemático básico y de frecuente empleo.

### 4.5.1. Método de Carr y Madan

Dada la fórmula (2.4), sabemos que el precio de la opción en función del strike es

$$C(k) = e^{-rT} E\left((e^{rT+X_T} - e^k)^+\right).$$

A su vez, también definimos el precio de la opción tiempo modificado como

$$Z_T(k) = e^{-rT} E\left((e^{rT+X_T} - e^k)^+\right) - (1 - e^{k-rT})^+. \quad (4.10)$$

Este procedimiento tiene como objetivo utilizar las herramientas de la transformada de Fourier en términos de la función característica  $\Phi_T(v)$  del

## 4.5. La transformada de Fourier

---

proceso  $X_T$ , con el fin de encontrar los precios de las opciones en un rango de strikes.

En el método, expresamos el precio del activo en términos de unidades de él,  $S_0 = 1$ , y denotamos  $k = \log(K)$ . Debemos asumir que el precio del activo tiene momento de orden  $1 + \alpha$  para algún  $\alpha > 0$ , es decir

$$\exists \alpha > 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_T(s) e^{(1+\alpha)s} ds < \infty, \quad (4.11)$$

donde  $\rho_T$  es la densidad de riesgo neutral de  $X_T$ . Como observamos en la sección 4.2, la condición anterior es equivalente a exigir que la medida de Lévy cumpla

$$\exists \alpha > 0 \quad \int_{|y| \geq 1} \nu(dy) e^{(1+\alpha)y} < \infty. \quad (4.12)$$

Sea  $Z_T(k)$  el precio de una opción tiempo modificado y como los procesos de precios descontados son martingala, podemos expresarlo mediante

$$Z_T(k) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_T(x) dx (e^{rT+x} - e^k) (1_{k \leq x+rT} - 1_{k \leq rT}). \quad (4.13)$$

Entonces la transformada de Fourier de  $Z_T$  es

$$\xi_T(v) = FZ_t(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} Z_T(k) dk. \quad (4.14)$$

La condición (4.11) nos permite intercambiar el orden de las integrales en (4.14) y al calcular obtenemos

$$\begin{aligned} \xi_T(v) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} \rho_T(x) (e^{rT+x} - e^k) (1_{k \leq x+rT} - 1_{k \leq rT}) dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} (e^k - e^{rT+x}) dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(x) \left( \frac{e^{ivrT} (1 - e^x)}{1 + iv} - \frac{e^{x+ivrT}}{(1 + iv)iv} + \frac{e^{(1+iv)x+ivrT}}{(1 + iv)iv} \right) dx. \end{aligned}$$

El primer término en los paréntesis desaparece a causa de la condición de martingala y utilizando la siguiente cadena de igualdades

$$e^{x+ivrT} + e^{(1+iv)x+ivrT} = e^{ivrT} (e^x e^{ivx} - e^x) = e^{ivrT} (e^{i(v-i)x} - e^x),$$

## 4.6. Calibración

---

obtenemos que se cumple

$$\xi_T(v) = e^{ivrT} \frac{\Phi_T(v-i) - 1}{(1+iv)iv}.$$

Entonces el precio de la opción tiempo modificado  $Z_T(k)$  se encuentra invirtiendo su transformada de Fourier  $\xi_T$

$$Z_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \xi_T(v) dv.$$

Con el objetivo de aplicar este método a datos empíricos, nos encontramos en la necesidad de aproximar la inversa de la transformada de Fourier mediante su transformada de Fourier discreta.

$$\begin{aligned} Z_T(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \xi_T(v) dv \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-A/2}^{A/2} e^{-ivk} \xi_T(v) dv \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{j=N-1} w_j \xi_T(v_j) e^{-iv_j k}, \end{aligned}$$

donde  $v_j = -A/2 + j\Delta$  siendo  $\Delta = A/N - 1$  la discretización y  $w_j$  son los ponderadores correspondientes a la regla de integración. Definiendo  $k_n = k_0 + \frac{2\pi n}{n\Delta}$ , el último término se convierte

$$Z_t(k_n) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{A}{N} e^{ik_n A/2} \sum_{j=0}^{j=N-1} w_j \xi_T(v_j) e^{-2\pi i n j / N}, \quad (4.15)$$

siendo la suma de la ecuación la transformada de Fourier discreta de la función  $\xi_T$ .

Vale destacar, que esta sección fue basada principalmente en [6]. La metodología que proponen permite solamente calcular precio de opciones para strikes por encima del valor actual. Nosotros la generalizamos para calcular precios en todos los strikes.

## 4.6. Calibración

EN los mercados incompletos, la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$ , que es utilizada para la valuación de opciones en (2.4), sólo hereda algunas propiedades

## 4.6. Calibración

---

cualitativas de la medida de probabilidad histórica  $P$ , la cual proviene del análisis de la serie de tiempo del activo. Por lo tanto, el conocimiento preciso del proceso de precios histórico no nos permite encontrar el precio de las opciones.

En los mercados financieros reales, existen activos sobre los cuales se negocian opciones en mercados organizados. Esta actividad origina la existencia de precios que ocasionan un gran aumento en la cantidad de información a ser utilizada en la selección del modelo. La calibración consiste en modelar directamente la dinámica de riesgo neutral del activo optando por la medida de probabilidad  $Q$  (respetando las propiedades cualitativas del precio del activo) que mejor reproduce los precios de opciones del mercado.

En los capítulos anteriores, el problema al que nos enfrentamos era la valuación de opciones dado un modelo exponencial de Lévy, aquí la situación varía porque estamos interesados en encontrar los parámetros que describen la dinámica del activo observando el precio de opciones.

Sea un modelo exponencial de Lévy definido por su tripleta característica  $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$ , donde  $\theta$  representa el conjunto de parámetros del modelo. El problema más general al que nos podemos enfrentar en la calibración es el siguiente.

**PROBLEMA 1** Dado un modelo exponencial de Lévy con  $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$  y precio  $C_i$  de opciones para las madureces  $T_i$  y los strikes  $K_i$  con  $i \in I$ , encontrar  $\theta$  tal que  $S_t \exp(-rT)$  sea una martingala y los precios de opciones son dados mediante la ecuación

$$C_i = e^{-rT} \mathbf{E}^\theta ((S_{T_i} - K_i)^+),$$

donde  $\mathbf{E}^\theta$  es la esperanza bajo el modelo de tripleta  $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$ .

En este problema no se tiene en cuenta la información pasada del activo, generando inconvenientes en la identificación satisfactoria del modelo. En sí, debemos restringir la elección a la clase de medidas de martingala equivalentes de un modelo a priori que puede resultar de una estimación histórica o de acuerdo a la perspectiva del inversor. Además, para obtener soluciones en la práctica, la calibración la realizamos utilizando la técnica de análisis numérico conocida como Mínimos Cuadrados no Lineales.

## 4.6. Calibración

---

PROBLEMA 2 Dado un modelo exponencial de Lévy con  $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$  y precio  $C_i$  de opciones para las madureces  $T_i$  y los strikes  $K_i$  con  $i \in I$ , encontrar  $\theta^*$  tal que

$$\theta^* = \arg \min_{Q_\theta \in Q} \sum_{i=1}^N \omega_i \left| C^\theta(K_i, T_i) - C_i \right|^2, \quad (4.16)$$

donde  $C^\theta$  denota el precio de la opción para el modelo  $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$  y  $Q$  es el conjunto de medidas de martingalas equivalentes.

Esta metodología es la que aplicaremos en las calibraciones de los modelos en los próximos capítulos. El objetivo es elaborar un buen procedimiento para el cálculo teórico de las opciones para ingresarlo en la ecuación (4.16) con el fin de establecer los parámetros que minimizan dicha ecuación.

# Merton Jump Diffusion y Variance Gamma

---

## 5.1. Modelo de Merton (MJD)

EN 1976, Robert Merton propuso en el artículo [16] un modelo de evolución de precios que presentara discontinuidades. En el modelo, el cambio total del precio está compuesto por dos causas. La primera es un cambio “débil”, el cual causa sólo cambios marginales en el valor. Esta componente está modelada por un movimiento browniano geométrico el cual sabemos que presenta trayectorias continuas. La segunda es un cambio “fuerte”, el cual ya no causa solo cambios marginales. Merton modela esta componente mediante un proceso de Poisson compuesto, el cual tiene trayectorias constantes a tramos y en algunos instantes las trayectorias no son continuas. Por lo tanto, bajo la medida de probabilidad histórica  $P$ , el precio del activo es modelado como

$$S_t = S_0 \exp \left( \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \right),$$

donde

- $(W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano,
- $(N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$  independiente de  $(W_t)_{t \geq 0}$ ,
- $\xi_i$  son variables aleatorias independientes de distribución  $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ .

Como sabemos del capítulo anterior, este modelo es incompleto existiendo infinitas elecciones de la medida de riesgo neutral. En su trabajo, Merton propuso una medida de riesgo neutral específica  $Q$  que la obtuvo al variar el

## 5.1. Modelo de Merton (MJD)

---

drift pero dejando incambiada la distribución de los saltos, al basarse en su hipótesis de que el riesgo asociado a los saltos era diversificable. Bajo esta medida  $\mathbb{Q}$ , la dinámica del precio es

$$S_t = S_0 \exp\left(\tilde{\mu}t + \sigma\tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i\right),$$

donde

- $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano,
- $(N_t)_{t \geq 0}$  y  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  permanecen incambiado,
- $\tilde{\mu} = r - q - \sigma^2/2 - \lambda \mathbf{E}(e^{\xi_i} - 1) = r - q - \sigma^2/2 - \lambda(\exp(m + \delta^2/2) - 1)$  para que se cumpla que  $(\hat{S}_t)_{t \geq 0}$  sea una martingala.

Sea  $\tau := T - t$ , el precio de una opción de compra europea con precio de ejercicio  $K$  en tiempo  $t$  es

$$\begin{aligned} C_t^M &= e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}((S_T - K)^+ | S_t = S) = \\ &e^{-r\tau} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}((S e^{\tilde{\mu}\tau + \sigma\tilde{W}_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} \xi_i} - K)^+), \end{aligned}$$

dado que  $(S_t)_{t \geq 0}$  cumple la propiedad de Markov bajo la medida  $\mathbb{Q}$ . Al condicionar en el número de saltos obtenemos

$$\begin{aligned} C_t^M &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \mathbb{Q}(N_t = n) \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}((S e^{\tilde{\mu}\tau + \sigma\tilde{W}_t + \sum_{i=1}^n \xi_i} - K)^+) = \\ &e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}((S e^{nm + n\delta^2/2 - \lambda \exp(m + \delta^2/2) + \lambda\tau} e^{r\tau - q\tau - \sigma_n^2\tau/2 + \sigma_n W_\tau} - K)^+) \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} C^{bs}(S_n, K, \tau, \sigma_n), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \sigma + n\delta^2/\tau, \\ S_n &= S \exp\left(nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda\tau \exp\left(m + \frac{\delta^2}{2}\right) + \lambda\tau\right), \end{aligned}$$

y  $C^{bs}(S, K, \tau, \sigma)$  es la fórmula de Black-Scholes para estos parámetros. La fórmula (5.1) es la fórmula de Merton para calcular el precios de opciones

## 5.2. Subordinadores

---

de compra europeas.

Analizando la fórmula (5.1) observamos que  $C^{bs}(S_n, K, \tau, \sigma_n)$  es el valor de la opción condicional a que existirán exactamente  $n$  saltos durante la vida de la opción. Por lo tanto el valor de la opción  $C_t^M$  es la suma de los pesos de cada uno de estos valores donde el peso es la probabilidad de que una variable aleatoria Poisson tome el valor  $n$ .

## 5.2. Subordinadores

Una manera de crear nuevos procesos de Lévy de algunos ya existentes es mediante la subordinación. Un subordinador puede ser interpretado como un cambio de tiempo y por lo tanto es utilizado para cambiar el tiempo de otros procesos. Los modelos construidos basados en cambios de tiempos poseen una interpretación natural donde el subordinador juega el rol de controlar el “tiempo de negocios” que es la tasa de llegada de nueva información al mercado.

**Definición 10.** *Los procesos de Lévy crecientes (no estrictamente) son llamados subordinadores.*

**Proposición 10.** *Sea  $X_t$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- a- *las trayectorias de  $X_t$  son casi seguramente crecientes;*
- b-  *$X_t \geq 0$  casi seguramente para todo  $t \geq 0$ ;*
- c-  *$X_t \geq 0$  casi seguramente para algún  $t \geq 0$ ;*
- d- *la tripleta característica de  $X_t$  cumple que  $\sigma = 0$ ,  $\nu((-\infty, 0]) = 0$ ,  $\int_0^\infty (x \wedge 1)\nu(dx) < \infty$  y  $\gamma \geq 0$ .*

*Demostración.*  $(a \rightarrow b)$  y  $(b \rightarrow c)$  son triviales.

$(c \rightarrow a)$  Para cada  $n$ ,  $X_t$  es suma de las siguientes  $n$  variables aleatorias independientes igualmente distribuidas  $X_{t/n}, X_{2t/n} - X_{t/n}, \dots, X_t - X_{(n-1)t/n}$ . Como  $X_t \geq 0$  casi seguramente obtenemos que cada una de las variables aleatorias son positivas (no estrictamente). Análogamente, si  $p$  y  $q$  son racionales tales que  $p < q$  obtenemos  $X_{qt} - X_{pt} \geq 0$  casi seguramente. Como las trayectorias son continuas por la derecha, concluimos que son

### 5.3. Procesos Estables Temperados

---

crecientes.

( $a \rightarrow d$ ) Como las trayectorias son crecientes, son de variación acotada y se obtiene  $\sigma = 0$ ,  $\nu((-\infty, 0]) = 0$  y  $\int_0^\infty (x \wedge 1)\nu(dx) < \infty$ . Además, si se extraen los saltos al procesos, obtenemos una función determinista que es también creciente, por lo cual  $\gamma \geq 0$ .

( $d \rightarrow a$ ) Dadas las características del proceso, se cumple que es de variación acotada y obtenemos que es igual a una función lineal creciente sumada a sus saltos. Para cada trayectoria, el número de saltos negativos en un intervalo fijo de tiempo es una variable aleatoria de Poisson de intensidad 0, por lo tanto casi seguramente es 0. Entonces casi toda trayectoria es creciente.  $\square$

**Definición 11.** Sea  $\tau_t$  un subordinador y  $W_t$  un movimiento browniano independiente de  $\tau$ . El proceso  $X_t$  es un movimiento browniano subordinado con drift  $\mu$  vía un proceso  $\tau_t$  si  $X_t := \mu\tau_t + \sigma W_{\tau_t}$ .

Este proceso al observarlo sobre la nueva escala de tiempo estocástica dada por el subordinador es un movimiento browniano con drift. Por lo tanto modelos en esta forma de subordinación agregan tratabilidad y son fáciles de entender aunque tienen la desventaja de imponer ciertas limitaciones en la medida de Lévy correspondiente.

### 5.3. Procesos Estables Temperados

**Definición 12.** Un proceso estable temperado es un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$  sin componente gaussiana y medida de Lévy  $\nu(dx)$  dada mediante la ecuación

$$\nu(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha}} e^{-\lambda_-|x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{x^{1+\alpha}} e^{-\lambda_+x} 1_{x>0}, \quad (5.2)$$

donde los parámetros satisfacen  $c_- > 0$ ,  $c_+ > 0$ ,  $\lambda_- > 0$ ,  $\lambda_+ > 0$  y  $\alpha < 2$ .

Por lo tanto, el proceso estable temperado es obtenido mediante un proceso estable, definido en la sección (3.2), y multiplicar su medida de Lévy con una función exponencial decreciente en cada eje real. Cada parámetro juega un rol preponderante dentro del modelo que se ve reflejado en su medida de Lévy. Los parámetros  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  determinan el comportamiento de las colas de la distribución de su medida y por lo tanto informan cuan lejos

## 5.4. Variance Gamma (VG)

---

los procesos pueden saltar teniendo como consecuencia la cantidad de dinero que puede perder o ganar el inversor en un período breve de tiempo. Los parámetros  $c_+$  y  $c_-$  determinan la frecuencia global y relativa de los saltos hacia arriba y hacia abajo aunque debemos tener en cuenta que la frecuencia de saltos es infinita. En tanto, el parámetro  $\alpha$  nos brinda información sobre el comportamiento del proceso, es decir, si  $\alpha$  es cercano a 2 el proceso posee muchas pequeñas oscilaciones entre los saltos grandes y si  $\alpha$  es cercano a 0 los precios cambian a causa de los grandes saltos y tienen períodos de estabilidad entre ellos.

## 5.4. Variance Gamma (VG)

EL proceso Variance Gamma fue introducido en la década del 90 por Madan, Carr y Chang en el artículo [13] como un modelo para los retornos de los activos. Este proceso es un modelo que consta de cuatro parámetros que corresponden al drift, la volatilidad, la asimetría y la curtosis. Este proceso se caracteriza por ser de gran actividad porque tiene en número infinito de saltos en cualquier instante de tiempo y no posee ninguna componente de martingala continua.

Sea  $Y_t = mt + \sigma W_t$  un movimiento browniano con drift de parámetros  $m$  y  $\sigma$ . Sea  $\gamma_t(1, k)$  un proceso Gamma de media 1 y tasa de variación  $k$ . La densidad  $f_h(x)$  de los incrementos  $x = \gamma_{t+h}(1, k) - \gamma_t(1, k)$  es dada a través de la función de densidad Gamma de media  $h$  y tasa de variación  $kh$ ,

$$f_h(x) = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{h}{k}} \frac{x^{\frac{h}{k}-1} \exp(-x/k)}{\Gamma\left(\frac{h}{k}\right)} \quad \text{con } x > 0.$$

**Definición 13.** *El proceso Variance Gamma es aquel que se expresa mediante la ecuación*

$$X_t(m, \sigma, k) = ct + m\gamma_t(1, k) + \sigma W_{\gamma_t(1, k)} = ct + Y_{\gamma_t(1, k)}.$$

La construcción del modelo Variance Gamma nos permite comparar con Black-Scholes y se observa que este modelo agrega dos parámetros más  $m$  y  $k$  a la volatilidad del mercado  $\sigma$  que controlan la asimetría y la kurtosis.

La función característica del proceso  $X_t$  es

$$\phi_{X_t}(u) = (e^{ictu}) \left( \frac{1}{1 - imku + \frac{\sigma^2 ku^2}{2}} \right)^{\frac{t}{k}},$$

## 5.5. Volatilidad Implícita

---

donde obtenemos que el exponente característico del proceso es

$$\psi(u) = icu - \frac{1}{k} \log \left( 1 - imku + \frac{\sigma^2 ku^2}{2} \right). \quad (5.3)$$

El rol de los parámetros los observamos claramente al expresar su medida de Lévy

$$\nu(x) = \frac{1}{k|x|} e^{Ax-B|x|}, \quad \text{donde } A = \frac{m}{\sigma^2} \text{ y } B = \frac{\sqrt{m^2 + 2\sigma^2/k}}{\sigma^2}.$$

Concluimos que el proceso Variance Gamma es un caso particular de un proceso estable temperado, el cual analizamos en secciones anteriores la incidencia de cada parámetro sobre la medida del Lévy.

## 5.5. Volatilidad Implícita

Debido a la importancia que la volatilidad tiene en el precio de la opción, lo que al inversor del mercado le interesa conocer es la posible evolución futura de esta variable, pues de su conocimiento dependen la correcta valuación de la opción y las posibles ganancias que se puedan producir derivadas de los errores que existen sobre las expectativas de volatilidad que tengan los demás agentes financieros. Pero la volatilidad futura no la conocemos de antemano, por esta razón es de gran utilidad aproximarla o predecirla a través de la información presente que se encuentra disponible en el mercado.

El modelo de Black-Scholes, como ya lo observamos, corresponde a modelos exponenciales de Lévy cuya medida de Lévy es  $\nu(dx) = 0$ . En este modelo las opciones tienen un único precio dado por la fórmula

$$C^{bs}(S_0, K, T, \sigma) = S_0 e^{-qT} \Phi(z) - K e^{-rT} \Phi(w), \quad (5.4)$$

donde

$$z = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad w = z - \sigma\sqrt{T},$$

$\Phi(x)$  es la función de distribución de la variable aleatoria normal estándar,  $r$  es la tasa de interés doméstica y  $q$  es la tasa de interés extranjera (sección 1.5.1).

En esta fórmula, la única variable no conocida es la volatilidad. Lo que sucede es que el mercado asume una volatilidad diferente a la histórica. La

## 5.5. Volatilidad Implícita

---

forma de resolver este problema es no utilizar la fórmula de Black-Scholes con el fin de obtener el precio de la opción, sino utilizarla para encontrar la volatilidad del mercado a partir del precio de las opciones negociadas.

Si todos los parámetros son fijos, la fórmula de Black-Scholes es una función continua creciente de  $\sigma$  que mapea  $(0, \infty)$  en  $((S_0 e^{-qT} - K e^{-rT})^+, S_0)$ . Por lo cual, dado el precio de mercado de la opción  $C_t^*(K, T)$  podemos invertir dicha fórmula para encontrar el valor del parámetro  $\sigma^*$  que cumple

$$C^{bs}(S_t, K, \tau, \sigma^*) = C_t^*(K, T), \quad (5.5)$$

que es conocida como la volatilidad implícita de la opción. Es una herramienta muy utilizada en los mercados de opciones dado que sus precios son habitualmente fijados en términos de volatilidad implícita.

Si fijamos  $(K, T)$  la volatilidad implícita  $\sigma_t^*$  es un proceso estocástico, pero al fijar  $t$  su valor depende de las características de la opción como lo es la madurez  $T$  y el precio de ejercicio  $K$ . Definimos la superficie de volatilidad implícita en el momento  $t$  como la función  $\sigma_t^* : (K, T) \mapsto \sigma_t^*(K, T)$ .

Con el fin de analizar el comportamiento de las superficies de volatilidad implícita en los dos modelos considerados observamos las Figuras 5.1 y 5.2.

De las dos figuras inferimos que estos modelos permiten calibrar volatilidades implícitas que presentan características tanto de asimetría como de “smiles”, que son propiedades que presentan los mercados financieros. También observamos que estas características se intensifican para las menores madureces y en  $T$  grandes las superficies se achatan.

## 5.5. Volatilidad Implícita

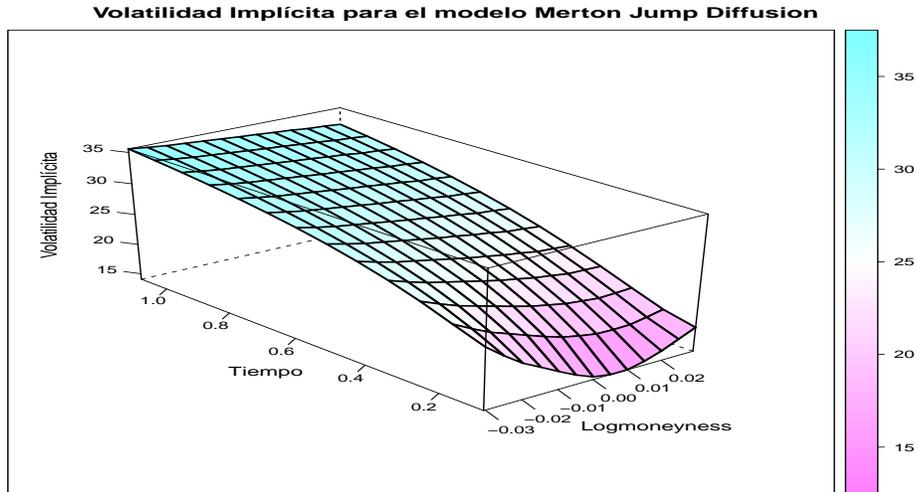


Figura 5.1: Perfil de la superficie de volatilidad implícita como función de la madurez y del Logmoneyness ( $Ke^{-(r-q)T}/S_0$ ) en el Modelo Merton Jump Diffusion de parámetros  $\mu = 0,06$ ;  $\sigma = 0,03$ ;  $\lambda = 1,3$ ;  $m = -0,05$ ;  $\delta = 0,32$ .

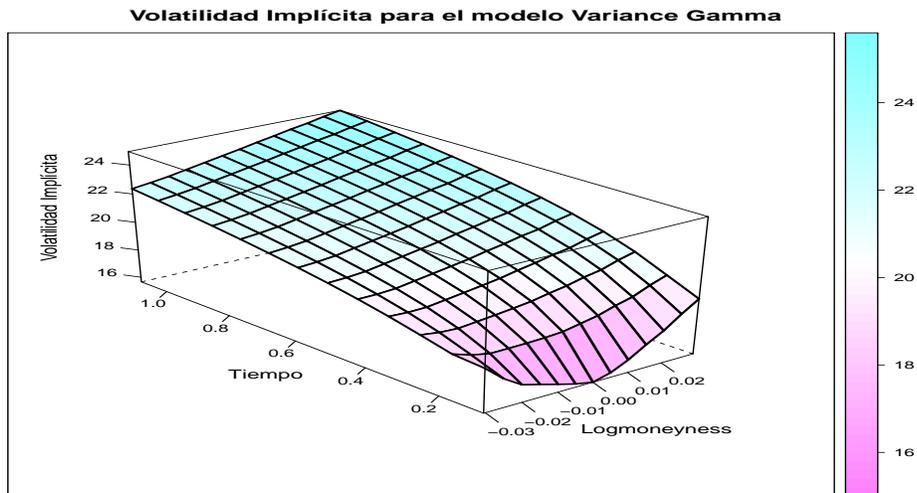


Figura 5.2: Perfil de la superficie de volatilidad implícita como función de la madurez y del Logmoneyness ( $Ke^{-(r-q)T}/S_0$ ) en el Modelo Variance Gamma de parámetros  $c = 0,00$ ;  $m = -0,15$ ;  $\sigma = 0,20$ ;  $k = 0,50$ .

# Aplicación al Eur/Usd

---

## 6.1. Preliminar

Nuestro trabajo tiene como objetivo final el estudio del riesgo en préstamos sujetos a incertidumbres cambiarias entre peso uruguayo y dólar. Mediante el teorema de Merton relacionaremos este riesgo con las opciones de compra entre estas monedas.

Como en el Uruguay no existe un mercado de opciones desarrollado sobre el dólar no nos beneficiamos con la información implícita que poseen los precios de dichas opciones. Esto genera que no se logre aplicar todos los procedimientos expuestos en los capítulos anteriores. Por tal motivo, con el fin de aplicar en su totalidad la teoría expuesta en este trabajo, utilizaremos el tipo de cambio euro-dólar (Eur/Usd) cuyos precios de opciones los presentamos en los Cuadro 6.2 y Cuadro 6.3.

En el caso de que exista en el futuro de un mercado de opciones profundo en el Uruguay solamente debemos adecuarnos a los problemas del caso pertinente. En general, esta metodología se aplica a todos los activos sujetos a riesgo como son las divisas, los índices bursátiles y los commodities entre otros.

En el Cuadro 6.1 aparece un resumen de los métodos que se encuentran disponibles en cada situación.

## 6.2. Historia del Dólar y del Euro

EL dólar es la moneda oficial de los Estados Unidos de América desde 1785 (aunque ninguna moneda fue acuñada antes de 1794). El euro es

## 6.2. Historia del Dólar y del Euro

---

Método de Valuación Aplicación	Máx. Ver. + Trans. Esscher	Calibración
Eur/Usd	POSIBLE	POSIBLE
Usd/Uy	POSIBLE	NO ES POSIBLE

Cuadro 6.1: Los métodos que se aplican de acuerdo a los datos existentes.

la moneda oficial de 17 de 27 países de la Unión Europea con fecha de circulación en enero de 2002 (aunque la introducción oficial fue 1 de enero de 1999).

En los últimos 100 años de historia, el dólar ha jugado un papel importante en el desarrollo de los países. Antes de finalizar la Segunda Guerra Mundial, momento en el cual algunos países europeos se encontraban devastados, los países vencedores decidieron, en el denominado Acuerdo de Bretton Woods, que las transacciones que se realizaran entre países del mundo occidental deberían efectuarse en dólares y en contrapartida Estados Unidos se comprometía a entregar una onza de oro cada 35 dólares cuando cualquier país lo requiriese, asumiendo al dólar como la moneda universal.

El 15 de agosto de 1971, el presidente de Estados Unidos Richard Nixon suspendió la convertibilidad del dólar en oro. Comenzó un período en el cual Estados Unidos emitió dólares sin respaldo deteriorando su cotización en relación a las monedas fuertes de esa época (especialmente el yen japonés y el marco alemán) al encontrarse sobrevalorado, intentando resolver el problema de la inflación interna y el creciente déficit de su balanza comercial.

En cambio, desde la década del 70, algunos países europeos comenzaron a analizar la posible creación de una moneda única en la región junto a una política económica en común sujetas a condiciones establecidas de responsabilidad fiscal. La firma del Tratado de la Unión Europea en 1992 fue la culminación del proyecto de integración económica europea y el cimiento de la creación de la moneda única a implementarse en 1999, momento en el cual se fijaron los tipos de cambio irrevocables frente a las monedas domésticas de los países participantes.

### 6.3. Datos de opciones Eur/Usd

---

Desde su creación, el euro se transformó en una gran alternativa frente al dólar tanto por motivos económicos como por motivos políticos. El primer día de circulación del euro cotizó a 0.9038 dólares, alcanzando su máximo en 2008 a 1.5990 dólares. La cotización histórica advierte de que existió un declive sostenido del dólar en los últimos 10 años evidenciando el deterioro de la economía estadounidense.

### 6.3. Datos de opciones Eur/Usd

Los datos fueron brindados por un banco privado de la plaza local. El acceso a ellos fue una tarea complicada y el mayor problema que presentan es la poca cantidad que poseemos.

Las tasas de interés que utilizamos son las correspondientes a la tasa de Estados Unidos en dólares ( $r = 0,25\%$ ) y la tasa de Europa en euros ( $q = 1,00\%$ ) debido a que las dos curvas de tasas de interés son relativamente planas y válidas para todos los períodos de tiempo analizados.

Los precios de las opciones de compra son exhibidas en los siguientes dos cuadros, donde la última columna corresponde al cálculo de la volatilidad implícita de cada opción mediante la fórmula (5.5).

Emisión	Madurez	Strike	P. de la opción	Vol. Implícita
11/11/10	13/12/10	1.3350	0.0332	13.56
11/11/10	13/12/10	1.3400	0.0295	12.78
11/11/10	13/12/10	1.3450	0.0262	12.54
11/11/10	13/12/10	1.3500	0.0230	12.00
11/11/10	13/12/10	1.3550	0.0201	11.17
11/11/10	13/12/10	1.3600	0.0174	10.80
11/11/10	13/12/10	1.3650	0.0149	10.73
11/11/10	13/12/10	1.3700	0.0126	10.38
11/11/10	13/12/10	1.3750	0.0105	10.46
11/11/10	13/12/10	1.3800	0.0087	10.79
11/11/10	13/12/10	1.3850	0.0072	10.94
11/11/10	13/12/10	1.3900	0.0058	11.02
11/11/10	13/12/10	1.3950	0.0047	11.29

Cuadro 6.2: El valor del Euro el día 11/11/10 correspondió a 1.3661.

#### 6.4. Precios de opciones vía la Transformada de Esscher

---

Emisión	Madurez	Strike	P. de la opción	Vol. Implícita
15/02/11	14/03/11	1.3100	0.0513	19.49
15/02/11	14/03/11	1.3150	0.0464	18.35
15/02/11	14/03/11	1.3200	0.0416	17.26
15/02/11	14/03/11	1.3250	0.0370	16.26
15/02/11	14/03/11	1.3300	0.0330	15.62
15/02/11	14/03/11	1.3350	0.0290	14.89
15/02/11	14/03/11	1.3400	0.0259	14.67
15/02/11	14/03/11	1.3450	0.0221	13.82
15/02/11	14/03/11	1.3500	0.0186	13.18
15/02/11	14/03/11	1.3550	0.0159	12.86
15/02/11	14/03/11	1.3600	0.0125	11.94
15/02/11	14/03/11	1.3650	0.0099	11.37
22/02/11	14/03/11	1.3100	0.0780	33.72
22/02/11	14/03/11	1.3150	0.0726	31.97
22/02/11	14/03/11	1.3200	0.0678	30.72
22/02/11	14/03/11	1.3250	0.0637	30.04
22/02/11	14/03/11	1.3300	0.0590	28.81
22/02/11	14/03/11	1.3350	0.0548	27.96
22/02/11	14/03/11	1.3400	0.0511	27.46
22/02/11	14/03/11	1.3450	0.0479	27.28
22/02/11	14/03/11	1.3500	0.0445	26.87
22/02/11	14/03/11	1.3550	0.0406	26.00
22/02/11	14/03/11	1.3600	0.0378	25.90
22/02/11	14/03/11	1.3650	0.0347	25.48
22/02/11	14/03/11	1.3700	0.0315	24.90
22/02/11	14/03/11	1.3750	0.0287	24.53
22/02/11	14/03/11	1.3800	0.0263	24.37
22/02/11	14/03/11	1.3850	0.0239	24.11
01/03/11	14/03/11	1.3700	0.0458	34.67
01/03/11	14/03/11	1.3750	0.0416	33.28
01/03/11	14/03/11	1.3800	0.0375	31.91
01/03/11	14/03/11	1.3850	0.0338	30.80
01/03/11	14/03/11	1.3900	0.0303	29.76
01/03/11	14/03/11	1.3950	0.0276	29.34
01/03/11	14/03/11	1.4000	0.0255	29.33
01/03/11	14/03/11	1.4050	0.0230	28.86
01/03/11	14/03/11	1.4100	0.0206	28.36
01/03/11	14/03/11	1.4150	0.0181	27.64
01/03/11	14/03/11	1.4200	0.0159	27.06

Cuadro 6.3: El valor del Euro el día 15/02/11 correspondió a 1.3470, el día 22/02/11 a 1.3679 y el día 01/03/11 a 1.3836.

#### 6.4. Precios de opciones vía la Transformada de Esscher

EN esta sección estimaremos los parámetros del Variance Gamma con el fin de calcular el precio de opciones y compararlo al precio de las opciones del mercado emitidas el día 1 de marzo de 2011 con tiempo de madurez el 14 de marzo de 2011.

## 6.4. Precios de opciones vía la Transformada de Esscher

---

### 6.4.1. Estimación histórica de la probabilidad del VG

Existen diferentes teorías acerca de la cantidad de datos a seleccionar para la estimación histórica. En este caso particular, decidimos elegir como último día el 1 de marzo de 2011 y enfocarnos en un período de 6 meses.

Para estos cálculos, utilizamos las funciones disponibles en el Software R, más precisamente en el paquete VarianceGamma y utilizamos el método de máxima verosimilitud (expuesto en la sección 4.3) para la estimación.

Los resultados obtenidos son

$$c = 0,08186 \quad m = -0,09699 \quad \sigma = 0,12303 \quad k = 0,11840.$$

Estos parámetros definen la medida de probabilidad histórica P y con ellos debemos ser capaces de calcular la medida de probabilidad de martingala equivalente Q mediante la transformada de Esscher.

### 6.4.2. Aplicación de la transformada de Esscher

Dada la ecuación (5.3), obtenemos que

$$\gamma(\theta) = \psi(-i\theta) = c\theta - \frac{1}{k} \log \left( 1 - \frac{\sigma^2 k \theta^2}{2} - mk\theta \right), \quad (6.1)$$

por lo cual desde la ecuación (4.8), el parámetro  $\theta^*$  es aquel que cumple

$$c(\theta+1) - \frac{1}{k} \log \left( 1 - \frac{\sigma^2 k (\theta+1)^2}{2} - mk(\theta+1) \right) - c\theta + \frac{1}{k} \log \left( 1 - \frac{\sigma^2 k \theta^2}{2} - mk\theta \right) = 0.$$

Realizando varias cuentas, obtenemos que el parámetro  $\theta^*$ , es la única raíz del polinomio de segundo grado que existe la función logaritmo en (6.1)

$$\sigma^2 k (e^{ck} - 1) \theta^2 + 2k(-m - \sigma^2 + me^{ck})\theta + (2 - 2mk - 2e^{ck} - \sigma^2 k) = 0. \quad (6.2)$$

Mediante un razonamiento análogo a la Proposición 9, obtenemos la manera que se vinculan la función característica de la medida de probabilidad Q con la función característica de la medida de probabilidad histórica P y el parámetro  $\theta^*$ ,

$$\psi_{Q_{\theta^*}}(z) = \psi_P(z + \theta^*) - \psi_P(\theta^*) \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

## 6.4. Precios de opciones vía la Transformada de Esscher

---

En el modelo Variance Gamma obtenemos mediante la ecuación (6.3),

$$\begin{aligned} \psi_{Q_{\theta^*}}(z) &= ic(z + \theta^*) - \frac{1}{k} \log \left( 1 + mk(z + \theta^*) - \frac{\sigma^2 k}{2} (z + \theta^*)^2 \right) \\ &\quad - ic\theta^* + \frac{1}{k} \log \left( 1 + mk\theta^* - \frac{\sigma^2 k}{2} (\theta^*)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Haciendo cuentas en (6.4), obtenemos que la función característica es

$$\begin{aligned} \psi_{Q_{\theta^*}}(z) &= icz - \frac{1}{k} \log \left( 1 + \left( \frac{m - s^2 \theta^*}{1 + mk\theta^* - \frac{\sigma^2 k (\theta^*)^2}{2}} \right) kz \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{2} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{1 + mk\theta^* - \frac{\sigma^2 k (\theta^*)^2}{2}}} \right)^2 z^2 \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

La ecuación (6.5), nos permite obtener los parámetros de la medida de probabilidad  $Q_{\theta^*}$ , los cuales son

$$c_{\theta^*} = c, \quad m_{\theta^*} = \frac{m - s^2 \theta^*}{1 + mk\theta^* - \frac{\sigma^2 k (\theta^*)^2}{2}}, \quad \sigma_{\theta^*} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + mk\theta^* - \frac{\sigma^2 k (\theta^*)^2}{2}}}, \quad k_{\theta^*} = k.$$

### 6.4.3. Precios de opciones

En nuestra aplicación, la ecuación (6.2) tiene como solución el valor  $\theta^* = 0,446397$ , por lo cual mediante sus fórmulas, obtenemos que los parámetros de la medida  $Q_{\theta^*}$  son

$$c_{\theta^*} = 0,08186 \quad m_{\theta^*} = -0,10430 \quad \sigma_{\theta^*} = 0,12336 \quad k_{\theta^*} = 0,11840.$$

Al obtener los parámetros anteriores, lo que resta es aplicar el Método de Carr y Madan con el fin de calcular el precio teórico de las opciones. Utilizamos la discretización expuesta en la sección 4.5 para calcular la aproximación del precio de la opción tiempo modificado  $Z_T(k)$  mediante la fórmula (4.15). El resultado que obtuvimos se encuentra en la Figura 6.1.

En la Figura 6.1 observamos la diferencia entre el precio de mercado y el precio calculado de las opciones. En esta oportunidad el precio calculado es superior al precio de las del mercado para todos los strikes. La diferencia más notoria se encuentra en los valores superiores.

## 6.5. Calibración del modelo MJD

---

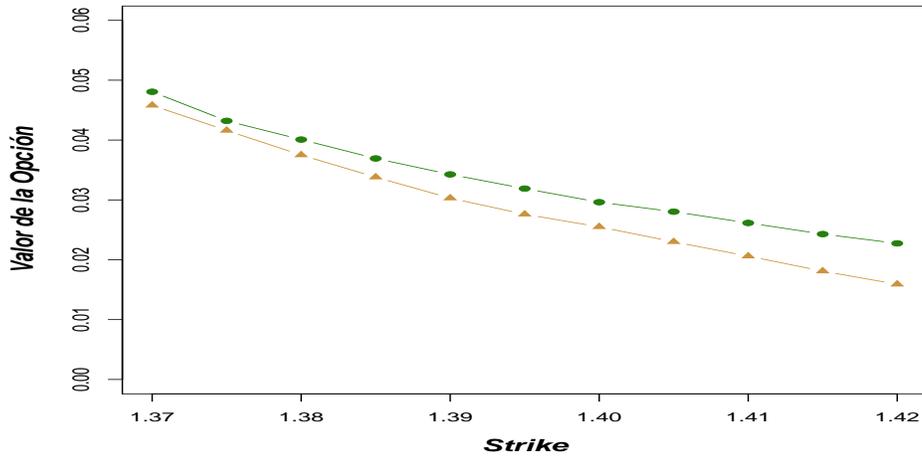


Figura 6.1: *Con puntos*: Cálculo de precios de opciones mediante la Transformada de Esscher. *Con triángulos*: Precio de las opciones en el mercado.

## 6.5. Calibración del modelo MJD

EN esta sección presentamos la calibración de la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  del modelo Merton Jump Diffusion, mediante la ecuación (4.16), utilizando los precios de opciones de mercado en dos casos diferentes.

La primera calibración corresponde solamente a las opciones emitidas el día 11 de noviembre de 2010 con tiempo de madurez el 13 de diciembre de 2010 (Cuadro 6.1). Al aplicar el Problema 2 de la sección 4.6, los ponderadores en la fórmula (4.16) son tales que consideran con mayor trascendencia los precios de ejercicio cercanos a 1.3661, que corresponde a la cotización del día 11 de noviembre de 2010.

Los resultados obtenidos son

$$\mu = 0,0599 \quad \sigma = 0,0316 \quad \lambda = 1,2786 \quad m = -0,0489 \quad \delta = 0,3175.$$

La comparación con los precios de mercado se observa en la Figura 6.2. En ella concluimos que la calibración otorgó buenos resultados, en especial en los strikes cercanos al valor del dólar del 11 de noviembre de 2010, que corresponden a la mayor ponderación en la minimización.

## 6.5. Calibración del modelo MJD

---

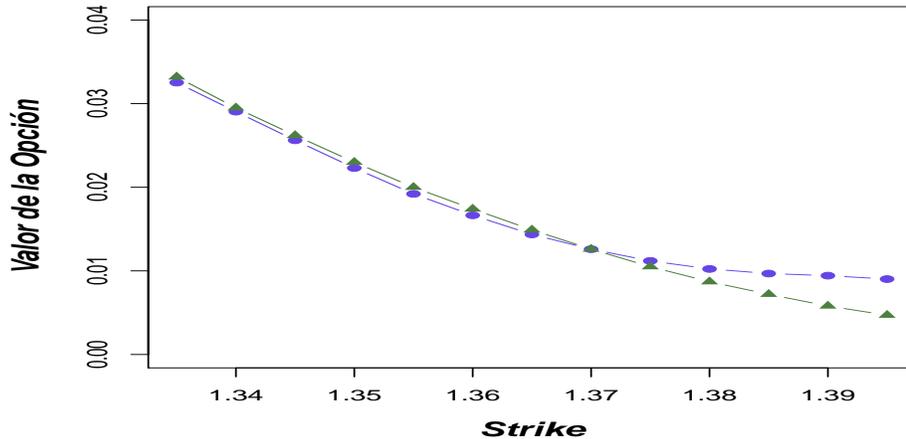


Figura 6.2: *Con puntos*: Cálculo de precios de opciones mediante la calibración del modelo MJD. *Con triángulos*: Precio de las opciones en el mercado.

En la segunda calibración, utilizamos todos los datos de la segunda tabla. Por lo cual, en este problema tenemos distintos tiempos de madurez, lo que perjudica en cierto sentido a la estructura de la minimización en (4.16), pero nos beneficia al utilizar una mayor cantidad de datos que en la anterior calibración.

Los resultados obtenidos son

$$\mu = 0,0372 \quad \sigma = 0,0174 \quad \lambda = 0,8216 \quad m = -0,0198 \quad \delta = 0,4886.$$

Las dos calibraciones presentan formatos similares en cuanto a los signos de los parámetros aunque se diferencian entre ellos. Al analizar los dos primeros momentos en ambas calibraciones observamos que en la primera su media es  $-0.002616$  siendo mucho más pequeña que en la segunda que es  $0.02098$ . Sucede lo mismo en el caso de la varianza, siendo  $0.1329$  y  $0.1967$  respectivamente.

Haciendo un análisis ex-post de la situación con el fin de evaluar los resultados obtenidos, observamos que entre el 11 de noviembre de 2010 y el 13 de diciembre de 2010 existió una caída en el valor del euro que es reflejada en la primera calibración mediante una media negativa. En cambio, entre

## 6.6. Calibración del modelo VG

---

los primeros días de enero y los primeros días de marzo se observa un fuerte aumento en el valor del euro (aproximadamente 8 %) y la segunda calibración también lo refleja. Las calibraciones también sugieren que al inicio del año 2011 existió mayor incertidumbre que al final del año 2010 al tener una varianza sensiblemente superior. Este resultado está vinculado a un valor superior en las volatilidades implícitas para el 2011 que para el 2010.

## 6.6. Calibración del modelo VG

EN esta sección presentamos la calibración de la medida de probabilidad  $Q$  del modelo Variance Gamma mediante la ecuación (4.16) utilizando los precios de opciones emitidas el día 22 de febrero de 2011 con tiempo de madurez el 14 de marzo de 2011.

Con el objetivo de que la medida de probabilidad calibrada  $Q$  sea absolutamente continua con respecto a la medida histórica  $P$  (calculada en sección 6.2), fijamos en la calibración el parámetro  $c = 0,08186$ .

Los resultados obtenidos son

$$c = 0,08186 \quad m = -0,6729 \quad \sigma = 1,0852 \quad k = 0,3363.$$

Nuevamente obtuvimos buenos resultados al aplicar la calibración al modelo Variance Gamma. Los resultados los visualizamos en la Figura 6.3.

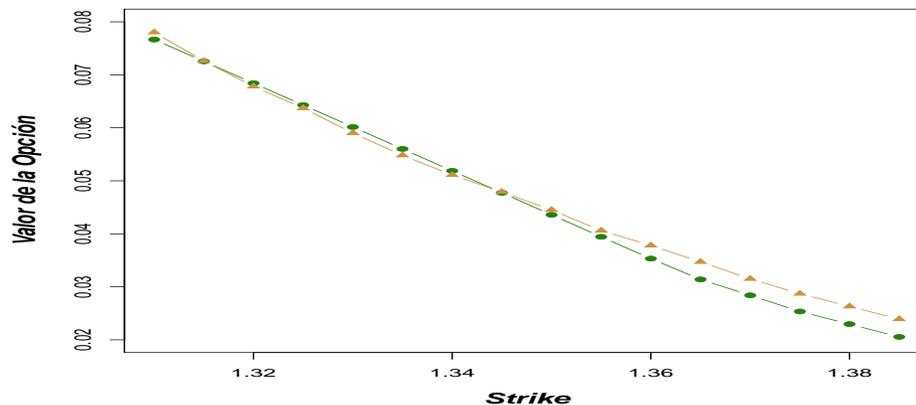


Figura 6.3: Con puntos: Cálculo de precios de opciones mediante la calibración del modelo VG. Con triángulos: Precio de las opciones en el mercado.

## 6.7. Resultados y algoritmos

---

### 6.7. Resultados y algoritmos

Con el objetivo de presentar todos los resultados obtenidos en la aplicación Eur/Usd elaboramos el Cuadro 6.4, que establece los métodos y los modelos utilizados con sus correspondientes parámetros calculados.

Método de Valuación	Modelo	Parámetros				
		c	m	$\sigma$	k	
Máx. Verosimilitud	VG	0.0818	-0.0969	0.1230	0.1184	
Máx. Ver + Trans Esscher	VG	0.0818	-0.1043	0.1233	0.1184	
Calibración	VG	0.0818	-0.6729	1.0852	0.3363	
		$\mu$	$\sigma$	$\lambda$	m	$\delta$
Calibración	MJD	0.0599	0.0316	1.2786	-0.0489	0.3175
Calibración	MJD	0.0372	0.0174	0.8216	-0.0198	0.4886

Cuadro 6.4: Todos los resultados obtenidos en la aplicación Eur/Usd.

A continuación se presentan los esquemas en alto nivel, de los algoritmos implementados para los métodos de valuación utilizados en el transcurso del trabajo. Vale destacar, que utilizamos en nuestros cálculos el lenguaje de programación R. Se intenta mostrar los algoritmos en esencia, sin entrar en los detalles del lenguaje utilizado, aunque incluimos los paquetes que se emplean en el software R.

#### ESQUEMA DE LA IMPLEMENTACIÓN

*Método de Valuación: Máxima Verosimilitud + Transformada de Esscher.*

- ✂ Cargar los datos y generar los retornos del activo.
- ✂ Calcular los parámetros del modelo VG de la medida de probabilidad histórica.

† Cargar Package: VarianceGamma.

† Utilizar Function: VgFit

## 6.7. Resultados y algoritmos

---

- ✘ Calcular el parámetro  $\theta^*$  de la transformada de Esscher y utilizar el resultado para calcular los parámetros de la medida de probabilidad equivalente.
- ✘ Generar la función MIFUNCIÓN1. Se le ingresan los parámetros del modelo VG y devuelve los precios de las opciones para los strikes seleccionados utilizando la transformada de Fourier.
  - ✓ Discretizar la recta real a conveniencia.
  - ✓ Cargar la función característica del modelo VG.
  - ✓ Calcular el precio de las opciones tiempo modificado.
  - ✓ Calcular el precio de las opciones.

### ESQUEMA DE LA IMPLEMENTACIÓN

*Método de Valuación: Calibración.*

- ✘ Cargar los datos de los precios de mercado.
  - † Cargar Package: Pspline.
  - † Utilizar Function: Smooth.Pspline.
  - † Utilizar Function: Predict.
- ✘ Discretizar la recta a conveniencia.
- ✘ Generar la función MIFUNCIÓN2. Se le ingresa el modelo a utilizar y devuelve la función característica correspondiente.
- ✘ Generar la función MIFUNCIÓN3. Se le ingresan los parámetros del modelo y devuelve los precios de las opciones para los strikes seleccionados utilizando la transformada de Fourier. Emplea MIFUNCIÓN2.
  - ✓ Calcular el precio de las opciones tiempo modificado.
  - ✓ Calcular el precio de las opciones.
- ✘ Realizar la calibración de MIFUNCIÓN3.
  - † Utilizar Function: Nls.



# Riesgo Cambiario Crediticio en el Uruguay

---

## 7.1. Sistema financiero uruguayo

A partir del año 1974 se aplicaron políticas que pretendieron reducir al mínimo la intervención estatal. Estas medidas tuvieron el objetivo de fomentar el ahorro financiero, para acrecentar el crédito destinado a la inversión y aumentar el empleo. Además se procuró que la evolución del precio del dólar acompañara la inflación que se generara en el tiempo. Se logró un aumento en la producción nacional pero el resultado negativo fue una tasa de inflación demasiado alta. Para combatirla, a mediados de 1978 se creó un tipo de cambio de paridad deslizante denominado “La Tablita”, en la cual el Banco Central del Uruguay (BCU) garantizaba el precio futuro del dólar tanto a la compra como a la venta. En sus primeros años esta política otorgó buenos resultados sin embargo el gran descenso del Producto Bruto Interno y un significativo atraso cambiario redujeron en gran forma las reservas del BCU teniendo como consecuencia la incapacidad de mantener el precio del dólar preestablecido.

En 1982 se registró una fuerte devaluación (aproximadamente 100 %) conocida como “El Quiebre de La Tablita”, comenzando allí un período marcado por los acuerdos firmados con el Fondo Monetario Internacional (FMI). El precio del dólar flotó libremente aunque existieron intervenciones apuntando a su estabilidad en el tiempo.

En el comienzo de la década de 1990 se optó por el sistema de bandas de flotación además se utilizó como ancla nominal el tipo de cambio. Este mecanismo le otorgó flexibilidad al BCU frente a variaciones del precio del

## 7.1. Sistema financiero uruguayo

---

dólar provocando un aumento de sus reservas. El Uruguay incrementó las relaciones comerciales con la región exportando una gran cantidad de productos y autorizando el ingreso de varios artículos importados al mercado doméstico.

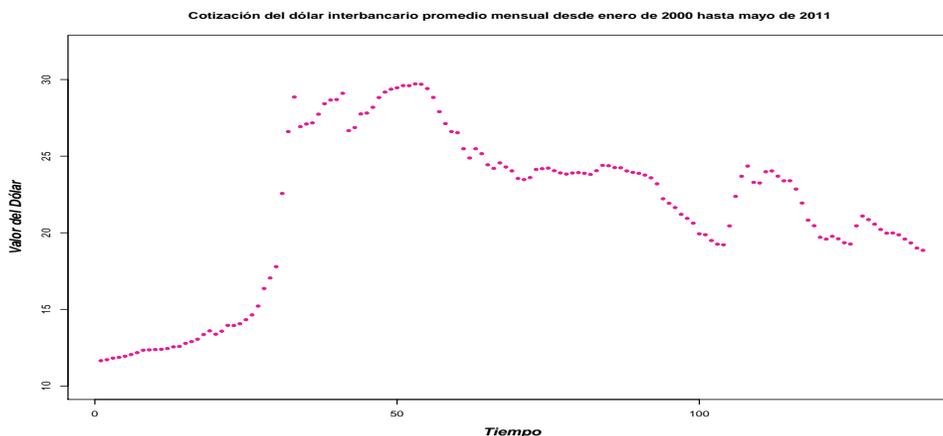


Figura 7.1: Evolución del precio del dólar.  
El valor 50 corresponde a Marzo de 2004 y el valor 100 corresponde a mayo de 2008.

En el año 1999 el deterioro económico se agudizó, no solo por el contexto internacional provocado por la devaluación en Brasil, sino por el gran atraso cambiario existente que generaba una pérdida de competitividad para el Uruguay. Con el fin de mejorar este inconveniente, se incrementó el ancho de las bandas de flotación. Además, en el año 2001 Argentina devalúa su moneda con una grave crisis social.

A mediados del año 2002 se produjo una crisis financiera en el Uruguay colapsando el sistema financiero. Se presentaron problemas con los depósitos en algunos bancos de la plaza, principalmente en el sector no residente al disminuir en gran porcentaje. Nuevamente ocurrió una devaluación de cerca de un 100%.

Desde finales de 2002 hasta la actualidad se escoge como política la libre flotación del dólar donde el BCU interviene únicamente en situaciones puntuales. Además se le otorgó libertad al BCU para que dirija el nivel de la inflación mediante el control de la tasa de encaje y la Tasa de Política Monetaria.

### 7.2. Intermediarios financieros

UN intermediario financiero es un agente económico especializado en las actividades de compraventa de contratos y títulos financieros. En el mundo de los mercados financieros completos tanto los inversores como los prestatarios podrían diversificar sus riesgos al seleccionar un reparto óptimo del mismo provocando que su presencia sea innecesaria. Pero al incluir pequeñas fricciones a los mercados deja de ser viable esta diversificación y se torna de suma importancia su existencia.

Un banco es aquel intermediario financiero cuyas operaciones habituales consisten en conceder préstamos (comprar títulos que emiten los prestatarios) y recibir depósitos (vender títulos a depositantes). La existencia de los bancos radica en las funciones básicas que desarrollan que pueden ser divididas en cuatro: facilitar el acceso a un sistema de pago, transformar activos, gestionar los riesgos y procesar la información supervisando a sus prestatarios.

Los bancos deben ser capaces de transformar de manera eficiente pasivos pequeños de corto plazo y bajo riesgo en activos grandes de largo plazo y mayor riesgo. Además la existencia de asimetrías de información al otorgar un préstamo en cualquier instante del contrato, ya sea ex-ante (selección adversa), durante (riesgo moral) y ex-post (verificación costosa de la naturaleza) también fundamentan la existencia de los bancos porque ellos explotan la economía de escala que se presenta en el acceso a información privilegiada.

Los bancos tienen una gran incidencia en el sistema financiero de los países por lo cual deben estar regulados. Su regulación es de suma importancia debido a que se apunta tanto a la influencia en la conducta de los directores como en las características específicas del sector bancario.

### 7.3. Actividades que desarrollan

LA gestión de riesgo puede considerarse como la principal actividad realizada por los bancos dado que deben seleccionar y controlar los riesgos inherentes al desarrollo de su negocio, los cuales provienen de direcciones muy diversas.

### 7.3. Actividades que desarrollan

---

Existen cuatro principales fuentes de riesgo que afectan a los bancos: el riesgo crediticio que es generado al emitir préstamos y no tener la certeza de ser cobrados; el riesgo de tasas de interés que se genera al tener tanto activos como pasivos a tasas de interés predeterminada; el riesgo de liquidez que sucede cuando un banco debe realizar pagos en efectivo de improvisto y el riesgo de operaciones fuera de balance que es generado cuando el banco realiza transacciones que desde el punto de vista contable no corresponde a un verdadero pasivo o activo sino sólo a un flujo de caja futuro incierto.

En nuestro trabajo nos enfocamos en el riesgo crediticio o riesgo de impago, el cual se define como la posible pérdida que asume el banco como consecuencia del incumplimiento de pago por medio del prestatario. Su medición es equivalente a indagar como evalúa el mercado la probabilidad de impago del prestatario teniendo en cuenta todas las posibles diversificaciones y coberturas que brindan los mercados financieros. Entonces el nivel de riesgo del banco depende del mecanismo institucional al que está sometido como el acceso a los mercados financieros (como por ejemplo mercado de capitales) al que está dispuesto y/o autorizado a participar.

Con el fin de evaluar el riesgo crediticio, Merton propuso un modelo en [14]. Asumió que el banco otorga un préstamo de capital  $D_0$  a devolver en cierto instante de tiempo una cantidad  $D_T$  (no existen pagos intermedios). El valor de los activos del prestatario es variable en el tiempo  $V_t$  que se supone que son negociables sin costo y no tiene deudas pendientes. En el instante  $T$  pueden ocurrir dos escenarios:

- $D_T \leq V_T$  el prestatario es solvente y el banco recibe su pago  $D_T$ ,
- $D_T > V_T$  el prestatario se declara en quiebra sus activos se liquidan y el banco recibe  $V_T$ .

El rendimiento final del banco es  $\min(D_T, V_T)$  y el valor de mercado de los activos del prestatario es  $\max(0, V_T - D_T)$  el cual corresponde al rendimiento de una opción de compra de los activos del prestatario con un precio de ejercicio  $D_T$ .

Entonces, de acuerdo al modelo de Merton, conceder un préstamo con riesgo crediticio es como comprar los activos del prestatario y venderle una opción de compra de sus activos a precio de ejercicio  $D_T$ .

### 7.4. Riesgo Cambiario Crediticio

Algunas economías emergentes presentan una alta dolarización financiera, que a diferencia de los países desarrollados determina que su sistema bancario se exponga a otros tipos de riesgo que los considerados en la sección anterior.

Los bancos al financiar una proporción significativa de los préstamos que conceden mediante los depósitos del sector no financiero y como estas economías presentan una gran proporción de activos en moneda extranjera sobre el total del sistema, conlleva a que la estrategia adoptada por los bancos sea cubrir sus depósitos en moneda extranjera otorgando préstamos en ella. Pero en el caso que los bancos conceden créditos en dólares a agentes con ingresos en moneda doméstica, están trasladando el descalce de monedas a sus deudores. Esta situación genera un trade off entre mitigar el riesgo cambiario y una mayor exposición al riesgo de crédito porque cambian un riesgo de tipo de cambio directo (asumido por el banco) por un riesgo de tipo de cambio implícito (asumido por el deudor).

El riesgo cambiario crediticio se define como la pérdida esperada derivada del hecho de prestar en moneda extranjera a agentes que tienen sus ingresos principalmente en moneda local.

Si se produce un gran incremento en el tipo de cambio se genera un efecto ingreso negativo producto del incremento en el valor real de las obligaciones de los deudores respecto al valor de sus activos. Entonces el descalce de moneda por parte del deudor es el origen del riesgo de crédito al afectar de manera negativa la calidad de los balances de los bancos, en particular la calidad de su cartera de créditos.

Se torna de gran importancia generar la capacidad de estimarlo dado que su importancia radica en la vulnerabilidad que existe en el sistema bancario dolarizado en el caso de una devaluación de la moneda doméstica a través de pérdidas financieras tanto para los bancos como para la economía en su conjunto. En el artículo [19] se propone una manera de estimarlo al utilizar el teorema de Merton (analizado en la sección 7.3) con el objetivo de aproximar este riesgo a instrumentos financieros cuya valuación pueda ser llevada a cabo de acuerdo a las características que presenta el sistema financiero del país en cuestión.

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

---

El modelo de Merton se basa en que no existe descalce de monedas pero se puede generalizar de manera sencilla al caso que el deudor contrae un préstamo en moneda extranjera y que el riesgo de crédito está totalmente asociado a la evolución del tipo de cambio. Además, asumimos que el valor del activo del prestatario ( $V$ ) se mantiene constante durante todo el período y que no existen pagos intermedios por parte del deudor. El valor de mercado de los activos del prestatario es  $C_T = \max(V - S_T K^*, 0)$ , donde  $S_t$  es el valor de tipo de cambio y  $K^*$  es el valor de la deuda en moneda extranjera. El valor de mercado de la deuda en moneda doméstica al final del contrato se expresa

$$B_T = V - C_T = V - \max(V - S_T K^*, 0) = \min(V, S_T K^*) = S_T K^* - \max(S_T K^* - V, 0) = S_T K^* - K^* \max\left(S_T - \frac{V}{K^*}, 0\right).$$

Por lo cual, deducimos que un préstamo expuesto al descalce de monedas se expresa como una posición larga en un préstamo libre de riesgo y una posición corta en una opción de compra de moneda, donde el precio de ejercicio está dado por la relación que exista entre el valor del activo y el valor de la deuda pactada en dólares ( $V/K^*$ ). Si el tipo de cambio supera ese valor, la opción será ejercida y el prestamista se quedará únicamente con el valor de los activos del deudor.

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

EL sistema bancario uruguayo presenta ciertas características propias. La participación del mercado de los cuatro bancos más grandes es muy elevada teniendo como consecuencia un alto índice de concentración (tanto de activos como de pasivos); es más, la participación estatal supera el 50 % (como % de activos).

Como consecuencia de la crisis del año 2002, se observa la ausencia de bancos de capital privado nacional. Esta crisis, derivó en que la participación en los depósitos del sector no residentes disminuyera en gran medida y en los años posteriores esta cantidad se comportó de manera estable, nunca volvió a los porcentajes del año 2001. A su vez, cambió el comportamiento de los depositantes, bajó en gran medida los depósitos a plazo y aumentó los depósitos a la vista.

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

---

La característica principal del sistema bancario para nuestro trabajo es la alta dolarización financiera que presenta tanto en los depósitos como en los préstamos. Aunque en los últimos años, Uruguay ha logrado combatir parcialmente este fenómeno con ciertas políticas aplicadas, a la fecha la dolarización ronda el 70% en activos y en pasivos. Esta característica presenta ciertos inconvenientes al ser Uruguay una economía pequeña, que no es significativa en los mercados internacionales pero si recibe los diferentes impactos externos.

Al emplear la conclusión de la sección 7.4 al caso de Uruguay, obtenemos que un préstamo en dólares otorgado por un banco a agentes que tengan ingresos en pesos uruguayos se expresa como un préstamo libre de riesgo en pesos otorgado por el banco y una opción de compra de dólares en el cual el beneficiario es el deudor.

En el caso que Uruguay presentara un mercado de opciones profundo los precios serían obtenidos en aquel lugar pero al no existir se genera indispensable valorar opciones mediante algún procedimiento. Proponemos valorar las opciones mediante la Transformada de Esscher (análogo a la sección 6.4).

Consideramos el modelo Variance Gamma más adecuado para valorar opciones que el modelo de Black-Scholes para este mercado, dado que el tipo de cambio en el Uruguay ha experimentado variaciones ascendentes de gran magnitud (sección 7.1). El modelo Variance Gamma agrega dos parámetros más que corresponden a la asimetría y a la curtosis que existe entre las colas de la distribución de los retornos del activo, procurando solucionar parte de los problemas expuestos en la sección 1.4.

Con el fin de estimar los parámetros del modelo Variance Gamma utilizamos la cotización interbancaria diaria del dólar desde el 4 de enero de 2010 hasta el 31 de mayo de 2011.

Los resultados obtenidos son

$$c = -0,00141 \quad m = 0,00107 \quad \sigma = 0,01026 \quad k = 0,11839.$$

Estos parámetros definen la medida de probabilidad histórica  $P$  y utilizando la ecuación (6.2) obtenemos que  $\theta^* = 2,76834$ , por lo cual los parámetros de la medida de probabilidad de martingala equivalente  $Q_{\theta^*}$  son

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

---

$$c_{\theta^*} = -0,00141 \quad m_{\theta^*} = 0,00078 \quad \sigma_{\theta^*} = 0,01022 \quad k_{\theta^*} = 0,11839.$$

Al obtener los parámetros anteriores, lo que resta es aplicar el Método de Carr y Madan con el fin de calcular el precio teórico de las opciones. Las tasas de interés que utilizamos son del día 1 de junio para todos los periodos considerados. Las tasas de Uruguay en pesos la obtuvimos en la Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay S.A. y la extranjera es la tasa Libor en dólares.

Los precios teóricos de las opciones los observamos en el Cuadro 7.1 para distintas madureces. A su vez, con el fin de comparar con el modelo de Black-Scholes presentamos, en el Cuadro 7.2, los precios de opciones calculados mediante la fórmula (5.4) para la volatilidad  $\sigma$  que es igual a la varianza de la medida de probabilidad de martingala equivalente  $Q_{\theta^*}$  del modelo Variance Gamma. En todos los cálculos, la volatilidad anualizada que utilizamos en el modelo Black-Scholes fue  $\sigma = 4,7\%$ .

En la Figura 7.2 observamos los precios de las opciones para  $T = 1$ . En este caso, concluimos que los precios de opciones en nuestro modelo es sensiblemente superior al modelo de Black-Scholes salvo para los strikes más grandes.

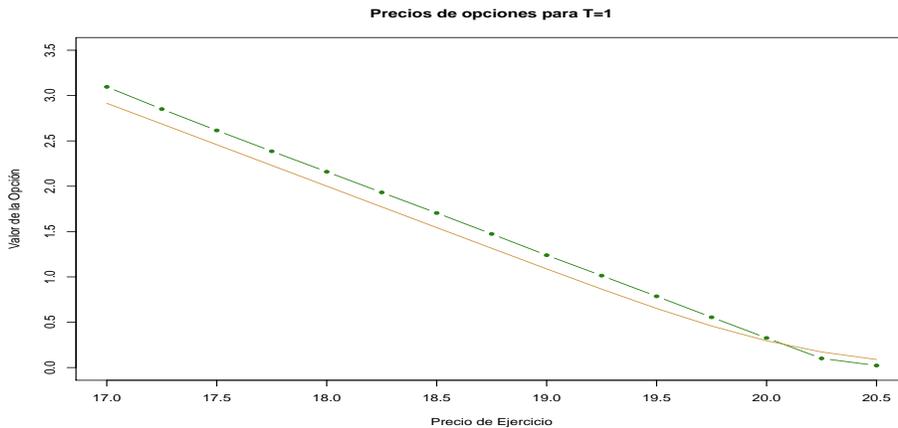


Figura 7.2: *Con puntos*: Cálculo de precios de opciones mediante la transformada de Esscher. *Con línea*: Precio de las opciones en el modelo Black-Scholes.

El resultado obtenido se extiende a todas las madureces en cuestión, concluyendo que en el caso particular analizado, los precios medidos a través

## **7.5. El sistema bancario en Uruguay**

---

del modelo que permite la existencia de saltos en el valor del dólar elevan el precio de la opción en nuestro país. Es razonable que así acontezca porque en Uruguay los saltos se han experimentado hacia arriba y no hacia abajo. Esto sucede debido a que el Banco Central se siente cómodo al comprar dólares con el fin de amortiguar su caída pero cuando el tipo de cambio tiende a subir el Banco Central no se siente tan confortable en salir a vender dólares para evitar que salte su valor.

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

---

STRIKE	3 MESES	6 MESES	9 MESES	12 MESES	15 MESES	18 MESES	21 MESES	24 MESES
17.000	1.9511	2.3153	2.6990	3.0959	3.4994	3.8960	4.2924	4.6949
17.250	1.6887	2.0579	2.4471	2.8510	3.2599	3.6627	4.0652	4.4739
17.500	1.4437	1.8421	2.2171	2.6156	3.0411	3.4494	3.8577	4.2721
17.750	1.1939	1.5748	1.9835	2.3858	2.8143	3.2285	3.6425	4.0628
18.000	0.9516	1.3360	1.7628	2.1598	2.5942	3.0140	3.4337	3.8597
18.250	0.7059	1.0956	1.5068	1.9317	2.3711	2.7966	3.2220	3.6539
18.500	0.4569	0.8520	1.2674	1.7049	2.1471	2.5762	3.0073	3.4451
18.750	0.2159	0.6162	1.0371	1.4739	1.9475	2.3632	2.7997	3.2432
19.000	0.0048	0.3716	0.7981	1.2394	1.7069	2.1457	2.5843	3.0036
19.250		0.1352	0.5672	1.0141	1.4706	1.9551	2.3766	2.8312
19.500		0.0103	0.3334	0.7860	1.2462	1.7212	2.1702	2.6262
19.750			0.0965	0.5549	1.0209	1.4822	1.9803	2.4189
20.000			0.0162	0.3266	0.7983	1.2623	1.7554	2.2178
20.250				0.1011	0.5787	1.0479	1.5231	2.0341
20.500				0.0227	0.3563	0.8313	1.3069	1.8338
20.750					0.1313	0.6120	1.0926	1.5921
21.000					0.0294	0.3957	0.8820	1.3777
21.250						0.1826	0.6745	1.1742
21.500						0.0361	0.4589	0.9642
21.750							0.2465	0.7576
22.000							0.0431	0.5486
22.250								0.3486
22.500								0.1407
22.750								0.0505

Cuadro 7.1: El valor de las opciones en el modelo Variance Gamma en pesos uruguayos.

## 7.5. El sistema bancario en Uruguay

STRIKE	3 MESES	6 MESES	9 MESES	12 MESES	15 MESES	18 MESES	21 MESES	24 MESES
17.000	1.9163	2.2488	2.5841	2.9151	3.2620	3.5887	3.9067	4.2208
17.250	1.6710	2.0090	2.3497	2.6870	3.0391	3.3716	3.6953	4.0152
17.500	1.4258	1.7690	2.1153	2.4583	2.8164	3.1545	3.4839	3.8096
17.750	1.1806	1.5291	1.8810	2.2296	2.5935	2.9373	3.2725	3.6039
18.000	0.9354	1.2892	1.6466	2.0009	2.3707	2.7202	3.0611	3.3983
18.250	0.6905	1.0494	1.4123	1.7723	2.1478	2.5030	2.8497	3.1927
18.500	0.4487	0.8105	1.1782	1.5437	1.9251	2.2860	2.6382	2.9871
18.750	0.2299	0.5769	0.9453	1.3154	1.7023	2.0689	2.4269	2.7814
19.000	0.0792	0.3624	0.7175	1.0884	1.4798	1.8518	2.2154	2.5759
19.250		0.1903	0.5034	0.8653	1.2582	1.6350	2.0041	2.3703
19.500		0.0793	0.3179	0.6521	1.0395	1.4189	1.7929	2.1647
19.750			0.1757	0.4584	0.8271	1.2048	1.5823	1.9593
20.000			0.0829	0.2955	0.6274	0.9950	1.3730	1.7542
20.250			0.0328	0.1720	0.4488	0.7937	1.1666	1.5501
20.500				0.0891	0.2993	0.6070	0.9661	1.3478
20.750				0.0407	0.1843	0.4415	0.7752	1.1492
21.000					0.1039	0.3031	0.5995	0.9571
21.250					0.0532	0.1950	0.4442	0.7754
21.500					0.0247	0.1170	0.3136	0.6083
21.750						0.0651	0.2099	0.4600
22.000						0.0341	0.1327	0.3340
22.250							0.0790	0.2321
22.500							0.0444	0.1538
22.750								0.0971
23.000								0.0582
23.250								0.0331

Cuadro 7.2: El valor de las opciones en el modelo Black-Scholes en pesos uruguayos.



# Conclusiones y eventuales extensiones

---

## Conclusiones

El objetivo del trabajo consistió en estudiar la valuación de opciones en mercados de Lévy con aplicaciones al mercado Eur/Usd y en la medición del riesgo cambiario crediticio en el Uruguay. El mercado de opciones es frecuentemente utilizado por los intermediarios financieros con diferentes finalidades pero depende de las monedas que participen la profundidad del mercado.

Nuestro objetivo es el estudio sobre el peso uruguayo y el dólar pero al no existir un mercado de opciones desarrollado en el Uruguay, nos trasladamos al tipo de cambio euro-dólar. Esta alternativa tiene el objetivo de aplicar los dos procedimientos disponibles: (a) estimación de máxima verosimilitud y transformada de Esscher a partir de datos estadísticos; (b) calibración a partir de precios de opciones. Se pretende formar una idea de la calidad del punto (a) aplicado al caso Usd/Uy, único procedimiento disponible visto la naturaleza del mercado. Ver los detalles en el Cuadro 6.1.

La metodología y los modelos utilizados en este trabajo pueden servir de referencia para el desarrollo futuro de un eventual mercado de opciones sobre el tipo de cambio en el Uruguay.

En el primer capítulo realizamos una introducción teórica sobre las opciones de compra en general y el mercado de divisas. En él establecemos los problemas a los que nos enfrentamos. Además, proponemos como instrumento para modelar el tipo de cambio los procesos de Lévy. Estos procesos,

---

así como las herramientas matemáticas que se describen más adelante, se encuentran en el libro *Financial Modelling With Jump Processes* de Rama Cont y Peter Tankov [6].

Los mercados financieros tienen la característica de que la cobertura perfecta no existe, lo cual los convierte en mercados incompletos. En el segundo capítulo estudiamos estos tipos de mercados y arribamos a la conclusión de que existen distintas maneras de valorar, libre de arbitraje, los reclamos contingentes. Culminamos este capítulo, estableciendo como las reglas de precios le atribuyen un valor a cada reclamo contingente.

El tercero trata sobre los procesos de Lévy en general, desarrollamos la teoría matemática con el fin de estudiar sus propiedades. Concluimos que los procesos de Lévy se tornan de gran importancia para generar modelos de mercados incompletos al existir infinitas medidas de probabilidad equivalentes.

En el cuarto capítulo se trabaja sobre el nexo entre la teoría y la práctica al presentar las herramientas matemáticas que nos permiten utilizar los datos empíricos. En él proponemos como procedimiento de valuación de opciones el Método de Carr y Madan que utiliza la transformada de Fourier, así como también, la transformada de Esscher como técnica que determina el cambio de medida de probabilidad. Para finalizar formulamos la calibración como medio para describir la dinámica de riesgo neutral del activo. Es una muy buena herramienta que se aplica únicamente en los casos donde existen precios de opciones.

En el quinto capítulo exponemos los dos modelos que se utilizan en el trabajo: Merton Jump Diffusion y Variance Gamma. Ambos modelos son exponenciales de procesos de Lévy que se diferencian notoriamente en la cantidad de saltos en cualquier intervalo de tiempo. En el primero, esta cantidad es finita y cada salto modela un evento extraño, mientras que en el segundo la cantidad de saltos es infinita y el proceso se desplaza fundamentalmente gracias a ellos.

En el sexto capítulo empleamos todos los métodos expuestos en los capítulos anteriores al caso Eur/Usd. En el primer estudio encontramos los precios teóricos de las opciones utilizando la estimación de los parámetros del modelo Variance Gamma por máxima verosimilitud y la transformada de Esscher. En la Figura 6.1 observamos que los precios calculados son sen-

---

siblemente superiores a los precios de mercado. Como en este caso existen precios de opciones realizamos la calibración de ambos modelos. Los resultados obtenidos son notoriamente mejores al caso anterior, ya sea comparando con los precios de mercado (Figura 6.2 y Figura 6.3) o haciendo un análisis ex-post de la situación. Todos los resultados se encuentran en el Cuadro 6.4.

El último capítulo tiene como objetivo de estudio las opciones sobre dólar-peso uruguayo, motivado por el riesgo cambiario crediticio generado en préstamos en dólares a agentes que tienen ingresos en pesos uruguayos. En este caso aplicamos la estimación por máxima verosimilitud y mediante la transformada de Esscher calculamos los precios. Al no tener precios de mercado, calculamos también los precios de opciones utilizando la fórmula de Black-Scholes para compararlos. Concluimos que en la metodología propuesta los precios de opciones al utilizar un modelo de Lévy son superiores a los precios de Black-Scholes (con una volatilidad global coincidente para ambos modelos), salvo para los strikes grandes. Los resultados son visualizados en el Cuadro 7.1 y el Cuadro 7.2.

## Posibles extensiones del trabajo

Este trabajo proporciona una gran cantidad de eventuales desarrollos, algunos más inmediatos que otros. Establecemos algunos que se nos han presentado en el transcurso del mismo.

Una posible extensión es aplicar los procedimientos adquiridos en el trabajo a otros modelos exponenciales de Lévy. Entre ellos se encuentran el modelo de Kou [10], los procesos gaussianos inversos y los modelos hiperbólicos generalizados. También se puede aplicar esta metodología a los modelos más empleados en la industria financiera como lo son el modelo de Heston, los modelos de Volatilidad Local y los modelos de Volatilidad Estocástica, que son visualizados en el software que brinda la compañía estadounidense Bloomberg L.P..

Mediante la metodología desarrollada, se logra también medir el riesgo cambiario crediticio que están sujetos los exportadores, que tienen ingresos en dólares, en Uruguay cuando se les concede préstamos en dicha moneda y no se realiza ninguna cobertura con respecto al incremento de sus costos en moneda nacional. Si se produce un gran descenso en el tipo de cambio, se genera un efecto negativo producto del descenso del valor de sus activos

---

con respecto al valor de sus obligaciones. En este caso, es necesario calcular los precios de opciones de venta (put) que pueden obtenerse, por ejemplo, a partir de la paridad Call-Put, en la medida que sean opciones europeas.

Otra posible alternativa al valuar las opciones de compra es utilizar la información que proviene del mercado de futuros. La misma es adecuada al caso uruguayo dado que en BEVSA existe un mercado de dólares forward en evolución. Se requiere la utilización de modelos más sofisticados como Heath-Jarrow-Morton (HJM).

En la actualidad se observa que el tipo de cambio peso uruguayo-dólar se comporta de manera análoga al tipo de cambio real-dólar. Por lo cual, algunos analistas afirman que el peso uruguayo se encuentra “atado” al real. A su vez, al existir un mercado desarrollado de opciones sobre real-dólar, se propone aplicar los conocimientos a este mercado y adaptarlos de manera cuidadosa al caso uruguayo.

La última extensión que se sugiere es un ejemplo en tres monedas. Se requiere valuar opciones sobre euro-real (mercado no existente) y sólo tenemos información de las opciones sobre dólar-real y sobre euro-dólar. En este caso se debe aplicar modelos exponenciales de Lévy multidimensionales teniendo en cuenta las posibles relaciones entre ellas.

# Bibliografía

---

- [1] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*. Annales de Ecole Normale Supérieure, 17 (1900), pp. 21-86.
- [2] Black, F. and Scholes, M., *The pricing of options and corporate liabilities*. The Journal of Political Economy, 3 (1973), pp. 637-654.
- [3] Carr, P. and Madan, D., *Option valuation using the fast Fourier transform*. Journal of Computational Finance, 2 (1998), pp. 61-73.
- [4] Carr, P., German, H., Madan, D. and Yor, M., *The fine structure of asset returns: An empirical investigation*. Journal of Business, 75 (2002), pp. 305-332.
- [5] Cont, R., *Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues*. Quantitative Finance, 1 (2001), pp. 1-14.
- [6] Cont, R. and Tankov, P., *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall: London, United Kingdom, 2003.
- [7] Freixas, X. and Rochet, J., *Economía Bancaria*. Antoni Bosch: Madrid, Spain, 1999.
- [8] Geman, H., Madan, D. and Yor, M., *Time changes for Lévy processes*. Mathematical Finance, 11 (2001), pp. 79-96.
- [9] Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson: New Jersey, United State, 2006.
- [10] Kou, S., *A jump-diffusion model for option pricing*. Management Science, 48 (2002), pp. 1086-1101.
- [11] Kyprianou, A., *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer: Munich, Germany, 2006.
- [12] Lamberton, D. and Lapeyre, B., *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall: London, United Kingdom, 1996.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [13] Madan, D., Carr, P. and Chang, E., *The Variance Gamma process and option pricing*. European Finance Review, 2 (1998), pp. 79-105.
- [14] Merton, R., *Theory of rational option pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973), pp. 141-183.
- [15] Merton, R., *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*. Journal of Finance, 29 (1974), pp. 449-470.
- [16] Merton, R., *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics, 3 (1976), pp.69-82.
- [17] Mikosh, T., *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing: Groningen, Netherlands, 1998.
- [18] Mishkin, F., *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*. Pearson: New York, United States, 2004.
- [19] Pena, A., *El riesgo cambiario crediticio medido a partir de opciones*. Revista de economía, 16 (2009), pp. 219-256.
- [20] Petrov, V. and Mordecki, E., *Teoría de la Probabilidad*. Dirac: Montevideo, Uruguay, 2008.
- [21] Poitras, G., *The early history of option contracts* . Faculty of Business Administration, Vancouver, Canada (2008).
- [22] Protter, P., *A partial introduction to financial asset pricing theory*. Stochastic Processes Applied, 91 (2001), pp. 169-203.
- [23] Sarno, L. and Taylor, P., *The Economics of Exchange Rates*. Cambridge University Press: Cambridge, United Kingdom, 2003.
- [24] Sato, K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press: Cambridge, United Kingdom, 1999.
- [25] Schoutens, W., *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley: New York, United States, 2003.
- [26] Shiryaev, A., *Essentials of Stochastic Finance*. World Scientific Publishing: Moscow, Russia, 2003.
- [27] Tankov, P. and Voltchkova E., *Jump-diffusion models: a practitioners guide*. Université Paris 7, Paris, France.